書　評

ウィリアム・ダンハム著，一樂重雄・實川敏明 訳，
「微積分名作ギャラリー ニュートンからルベーグまで」，
日本評論社，東京，2009
(原著 William Dunham 著，
“The Calculus Gallery Masterpieces from Newton to Lebesgue”，
Priceton Unicersity Press, 2005)

埼玉大学大学院理工学研究科　長澤 壯之

微分積分学は，言うまでもなく，ニュートンとライプニッツによって創始されたものである (人物名のカタカナ表記は，本書に従う．以下同じ)．現在の微分積分学では，ϵ-δ 論法により，全てが厳密化されているが，そのような論法が確立されていない創成期には，論理を展開するに当たり，相当の混乱と誤解を生じたことは想像に難くない．

「この頃の数学を読むと，いくつかの鍵盤が狂っているピアノでショパンを聴くような感じがする．楽曲の素晴らしさは誰にでもすぐにわかるが，ときどき何かおかしい.」

これは，本書の一節である (正確には，狂うのは「鍵盤」でなく,「調律」であると思う．原著者の誤りか，翻訳者の誤りであるのかは分らない)．ニュートンも，それ以外の微分積分学創成期の数学者も $\frac{0}{0}$ の説明の脆弱さには，気が付いていたに違いない．つまり,「狂い」を放置していた訳ではないのだ.「狂い」を矯正し，調和の取れた和音を奏でようと努力していたはずである (もちろん，今日の目 (耳) からすれば,「狂い」があるのは否めない)．本書では，当時の数学者が，$\frac{0}{0}$ の説明 (解釈) にどのように取り組み，進化して行ったかが，微分積分学の発達 (成熟といってもよい) として語られている．本書に記載されている極限に関するオイラーやコーシーの説明には，ϵ-δ 論法を知っている我々からみれば，理解不足の学生のセミナーを聴いているような印象を受けるだろう.「言いたい事は分るが，それじゃだめだよ.」と言いたくなる．しかし，それらの説明を時系列を追って眺めていくと，徐々に ϵ-δ 論法が垣間見えてくるのが分る．ϵ-δ 論法は，ある日突然現れたものではないのだ.

私のここまでの文面では，本書は，調律の狂ったピアノによる演奏を我慢しながら鑑賞する如く，微分積分学の歴史を回顧する内容に思われるかもしれない．決してそうではない．書名の一部に「ギャラリー」とあるように，それぞれの時代の数学者の考えや取り組みを，あたかもその時代における美術作品の最高傑作を鑑賞するような構成となっているのである．重ねて言うが，決して，重箱の隅を突付くようにそれらの「狂い」を指摘し，批判する事を目的とする書物ではない．

ギャラリーに登場する数学者は，ニュートン，ライプニッツ，ベルヌーイ兄弟，オイラー，コーシー，リーマン，リューヴィユ，ワイエルシュトラス，カントール，ヴォルテラ，ベール，ルベーグであり，それぞれが一つの章となっている．オイラーとコーシーの間と，ワイエルシュトラスとカントールの間には，幕あいと題する 2 つの章が挿入されている．もちろん，各章には，章のタイトル以外の数学者も数多く登場する．

それぞれの数学者は，もちろん高名であるので，数多くの伝聞が存在する．しかし，本書では，伝聞ではなく，オリジナルの論文なり書物に書かれた内容に直接あたり，調律が狂った鍵盤が何処なのかを指摘し，後年にどのように調律されていったかが書かれている．随所に，オリジナルの文

献が図表として掲載されているのも興味深い．現代の数学と表記や表現も異なるが，一部を除き，当時の表記・表現を極力そのまま用いながら，なおかつ読者に分りやすく伝えている．これを両立することが，困難な事は容易に想像できるが，本書では，それに成功している．文面からは，当時の数学者の息づかいが聞こえてくるようであり，この点は，原著者のみならず，翻訳者の果たした役割は大きい．原著者の生き生きとした文章が，翻訳者によって台無しになる事がしばしばあるが，本書はそれに全く該当しない．

記号について言えば，私自身の誤解を解いてくれた部分がある．私自身は，学生時代に，微分を表す記号 f' はニュートンの記号で，$\frac{df}{dx}$ はライプニッツの記号であると教わり，それを盲目的に信じて，今の学生に講義してきた．しかし，この本によれば，f' はラグランジュが導入したものであるらしい．積分の記号 $\int f\,dx$ はライプニッツによるが，$\int_a^b f\,dx$ の採用はフーリエのようだ．私は，これまで実に多くの学生に誤った情報を与えてしまったと恥じ入るばかりである．では，ニュートン自身は，微分や積分の記号としてどんな書き方をしていたのか？ ニュートンの章については,「後に標準的」となった記号で書き直しているため，ニュートン自身の記号は，本書を読む限りでは分らない．この点は，恐らく，読者の読みやすさを考慮した結果なのであろう．

個人的に，私が一番興味を持った章は,「ルベーグ」である.「ルベーグ積分」の講義をここ数年担当した事，現在「ルベーグ積分論」の教科書執筆を依頼されている事などが理由であるので，すべての読者には当てはまらない事を承知の上で，感想を述べたい．積分は，リーマンやダルブーにより，今日「リーマン積分」と呼ばれる理論が出来上がった．それによれば，有界閉区間上の連続関数は積分可能である．一方，不連続な関数でも積分可能な関数は存在する．ディルクレの関数のように，(リーマン) 積分が出来ない不連続関数も存在する．では,「積分が可能であるためには，どの程度の不連続性までが許されるか ?」これが，19 世紀の積分学の一つのテーマであったようだ．リーマン自身も関数の振動量を用いて積分可能性の必要十分条件を挙げている．また，ダルブーの定理も同様に一つの必要十分条件を与える．私自身，大学１・2 年生向けの微分積分学の講義で紹介した事がある事実であるが，これらは，積分可能性を別の言葉に置き換えただけとの印象ですっきりしなかった．そこで，ルベーグの登場となる．彼は，後に「ルベーグ測度」と呼ばれるものを導入し，次 (ルベーグの定理) を得たのだ．

「有界な関数 f が $[a, b]$ 上で (リーマン) 積分可能であるためには，不連続点の集合が (ルベーグ) 測度ゼロであることが必要十分である.」

大学１・2 年生向けの講義では,「ルベーグ測度」を定義しないので，この事実を紹介する事は困難であるが,「ルベーグ測度」の定義を理解した事を前提とするならば，これほど明快な解答はないと思う．リーマンやダルブーが得た必要十分条件は，積分可能性という「関数の性質」を別の「関数の性質」に言い換えたものである．ルベーグの結果は，積分可能性という「関数の性質」と不連続点からなる「集合の性質」との同値性を主張するものであり，この点で「性質」の言い換えという印象は (私は) 受けない．本書では,

「ルベーグの定理は，解析学の古典である．結果を見ると若干の皮肉を感じる．というには，リーマン積分を最終的に理解した人物が，すぐにそれを捨て去ったのであり，まさにその人がアンリ・ルベーグであった.」

とある．最終的に理解できたからこそ，一歩先に行けたのであろう.「ルベーグ積分」の講義の導入で触れるべき格好の題材である．

現在，微分積分学は，一応完成されつくした学問として考えられており，その上で関数解析学などの分野を築いている．この本を見ると，微分積分学について,「厳密さ」において完成させたのはワイエルシュトラスのように感じる (もちろん積分については，その後のルベーグによる精査がある)．しかし，ワイエルシュトラス以前の数学者も，その時々においては，微分積分学はすでに完成されたものと考えていたのではないだろうか．例えば，アンペールは,「連続関数は一般に微分可能であることを証明し，微積分学の教科書は 19 世紀の前半を通してそれを支持していた.」という．つまり，ワイエルシュトラスが病理学的関数を構成するまで，このような誤りが盲目的に信用されていたばかりでなく，**証明されていた**のだ (もちろん，その証明は誤っていたが)．微分積分学の歴史を見ると，時折巨人が現れて，盲目的に信じられてきた事を「厳密に証明する (または証明しなおす)」か,「反例を構成」して発展してきた．それでは，現在，我々が知っている微分積分学は，発展し尽くしたものなのか．100 年後の数学者たちからみれば，現在の我々が盲目的になっている部分があるのではないかと，本書を読むとしばしば不安になるのも事実である．

本書を読むためには，ある程度の数学の知識が必要である．著者は,「はじめに」触れられているように，数学を主専攻または副専攻とする学生が読める事を意図している．しかし，標準的な大学 1 年生の知識で本書の内容をすべて理解する事は困難である．1 年生の時期に第 4 章の幕あいー 1 まで，2 年生の時期に第 10 章の幕あいー 2 まで，3 年生以後に第 11 章以降を，といった具合に，大学の講義の進度に合わせて読み進めると，講義の意味が理解できるであろう．数学の講義が無味乾燥でつまらないと嘆いている学生がいたら，是非，本書を読むように薦めるとよい．教員にとっては，講義のネタとなる多くの素材が転がっているので，上手に活用すれば，講義が無味乾燥になることはない．

この類の書物の性質上，誤植は避けがたいが，本書の誤植は驚くほど少ない．私が気が付いたものを挙げておく．

p.22 下から ℓ.3 「$\angle$OTW の角度は $\pi - \alpha$」$\longrightarrow$ 「$\angle$DTW の角度は $\pi - \alpha$」または 「$\angle$OTW の角度は $\frac{\pi}{2} - \alpha$」

p.53 下から $\ell\ell$.2–3 「オイラーが 1979 年の論文で書いた」$\longrightarrow$ オイラー (1707–1783) の生没年から考えると,「オイラーが 1779 年の論文で書いた」の誤りか？

p.123 下から ℓ.1 「$\dfrac{1}{A^*p^n}$」$\longrightarrow$ 「$\dfrac{1}{A^*q^n}$」

p.168 ℓ.4 「$c = x_N$ は開区間 (A_{N+1}, B_{N+1}) 内にあり,」$\longrightarrow$ この部分だけを見ると誤りではないのだが，一つ上の行の「$A_N < A_{N+1} \leqq c \leqq B_{N+1} < B_N$」や，結論の「(2) によれば $N \geqq 2N+1$」から判断すると,「$c = x_N$ は開区間 (A_N, B_N) 内にあり,」が相応しいと思われる．

p.225 図のキャプション 「ルベーグの境界収束定理」$\longrightarrow$ 「ルベーグの有界収束定理」

本書の「はじめに」に書かれているが，採り上げられた数学者の選択は，著者ダンハムの「個人的好み」のようで,「ガウス，ボルツァーノ，そしてアーベルは，私の選択から落ちた」そうである．選択から外れた数学者やルベーグ以降の数学者についての続編を期待したい．また,「名作ギャラリー」シリーズとして，微分積分学以外の分野についても刊行していただきたい．