

トポロジーは応用できるか？

信州大学理学部 数理・自然情報科学科
玉木 大

1 トポロジーとは何か？

この講演では、トポロジーの考え方がどのように使われてきたか、使われているか、そしてこれから使われようとしているか、について、独断と偏見に基づいてお話したいと思います。

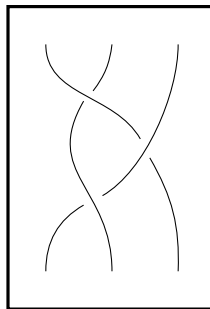
1.1 トポロジー = 柔らかい幾何学？

トポロジーという言葉聞いて、何を思い浮かべるでしょうか。この市民講演会の開会の際の、日本数学会理事長宮岡先生のご挨拶でも触れられていたように、一般向けのトポロジーの入門書では

コーヒーカップ \cong ドーナツ

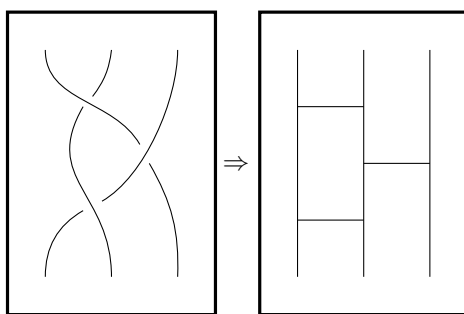
という例を使って説明してあることが多いように思います。適当にグニャグニャ動かして、一方の図形をもう一方の図形に移せるかどうかを考えるのがトポロジーである、ということを言いたいのでしょう。残念ながら、トポロジーに対してこのようなイメージを抱いている人がとても多いような気がします。実は、私自身、トポロジーに興味を持ったのは高校生のとき、村杉邦男先生の「組み紐の幾何学」というブルーボックスの一冊 [村杉邦82] を手にしたのが切っ掛けでした。そこに書かれていた、数学とは思えない数学の世界に惹かれて、大学に入ったらトポロジーなるものをやってみよう、と思ったわけです。

組み紐 (braid) とは、例えば、次の図のようにいくつかの紐が3次元空間に配置されたものです。



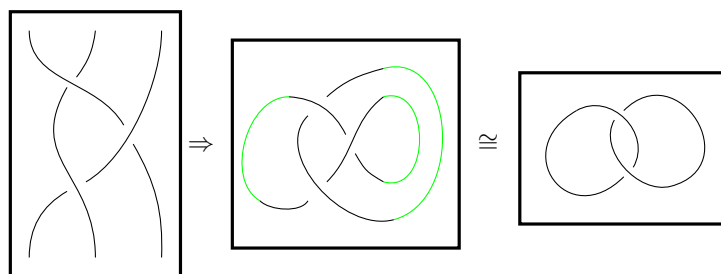
ただし、紐を上端の点からずっとたどってくるときに、紐の“z座標”は単調減少するものと仮定します。ですから、1本の紐だけ取り出してみると、結ばっていることはないわけです。紐の上と下の端は固定しておくものとします。それ以外の部分は紐同士がぶつからない限り、そして紐を切らない限り動かしてよいとします。ゴムのように伸ばしたり縮めたりしても構いません。

組み紐を平面的につぶして、その交点を横棒に変えるとあみだくじができます。



つまり、組み紐とは、あみだくじの立体版と言えるかもしれません。数理学の様々な分野で捻れを表わすときに使われる重要な構造です。あみだくじでは、横棒を少しぐらい上下させても結果は同じですから、くじの本質は「連続的変形」で変わらないと言えます。組み紐でも同様に連続的変形で移りあうものは同一視されます。

組み紐の両端を閉じると、絡み目 (link) や結び目 (knot) と呼ばれるものがありますが、これらが連続的変形で解けるかどうかを調べる結び目理論という分野もあります。



結び目や絡み目は、絵に描いたり実物をいじったりしやすいこともあり、トポロジーの入門的な題材によく使われています。信州大学の4年生で、卒業研究に幾何系のことをやりたい、という学生さん達の中にも「結び目をやってみよう」という人はよく現われます。

しかし、よく考えてみてください。こんな「適当にグニャグニャ変形して一致するか」などといういい加減な議論で数学ができるのでしょうか？ 現代数学の一つのウリは、厳密な論理に基づいて構築されていることだったはず。これが本当にトポロジーなのでしょうか？

それを考えるために、現代のトポロジーの始まりと言えるポアンカレ (Poincaré) の仕事にまで戻って考えてみることにしましょう。ポアンカレ以前にも、リーマン (Riemann) やベッチ (Betti)、そしてもっと古くオイラー (Euler) など、色々な人が現代のトポロジーの萌芽となるアイデアを出していますが、まとめて書かれたのはポアンカレの“Analysis Situs”が最初と言っていいのではないかと思います。“Analysis Situs”を読むと、ポアンカレが多様体を研究したかったことがわかります。当然ですが、ポアンカレは、組み紐や結び目を調べたわけではありません。当時はまだ多様体の概念が一般的でなかったためでしょう、冒頭で高次元の多様体を研究することは無意味なことではない、と力説しています。とにかく、トポロジーは多様体を調べるための道具として生れたわけです。

“Analysis Situs”は122ページもある論文でしたが、厳密な論理に基づいて構築されているとは言えない、どちらかというとその対局にあるようなものでした。様々な人にその不完全さを指摘され、5つの complement を出しています。1899年、1900年、1902年、1902年、1904年に、それぞれ59ページ、32ページ、22ページ、46ページ、66ページのものを出しています。ただ、それらの中で様々な斬新なアイデアが提案されたのが重要なことです。例えば、

- ホモロジー
- 基本群

- 単体的複体

などです。

1.2 トポロジーの三つの特徴

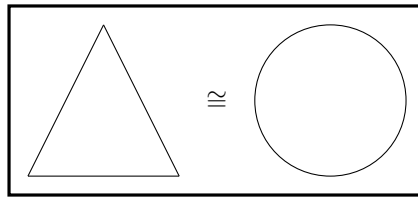
現代のトポロジーでも、もちろん、多様体の研究は中心的なテーマです。ただ、ポアンカレがホモロジーの定義の不完全さを回避するために考えた単体的複体は、既に多様体の範疇を逸脱したものになっています。トポロジーを使う立場に立ってみると、やはり多様体に限定された視点では不自由です。私自身、トポロジーの世界に足を踏み入れてから早30年程になりますが、年と共に「柔らかな幾何学」そして「多様体のトポロジー」という見方が「トポロジーに対する偏見」を生んでいるのではないかと、という思いが強くなってきました。

では、私にとってのトポロジーとは何かというと、次の三つの要素に集約できると思います。

1. 連続的変形を扱う
2. 不変量を駆使した研究
3. グローバルな視点

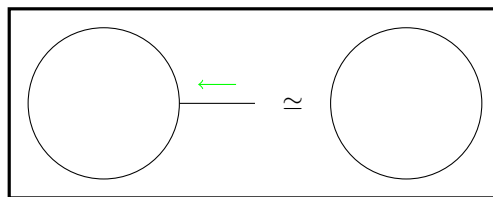
トポロジーの応用についてお話する前に、まずこの三つの要素について簡単に説明したいと思います。

まず連続的変形についてですが、連続的変形にも様々な種類があります。例えば、冒頭に出したコーヒーカップとドーナツが「同じ」というときの「同じ」は、同相という意味です。つぶしたりすることなく曲げるだけで変形するものです。より数学的な対象で言えば、例えば、三角形と円が同相

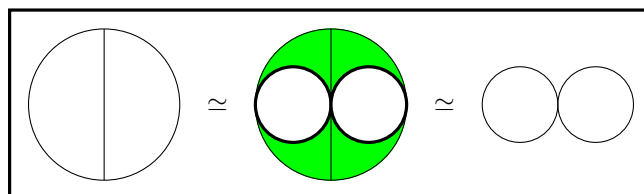


といった感じです。また、埋め込みを埋め込みのまま連続的に変形するアイソトピー (isotopy) という概念もあります。

もっと緩いのは、つぶすことも許したホモトピーという変形です。二つの図形間の関係としては、ホモトピー同値という関係 \simeq になります。

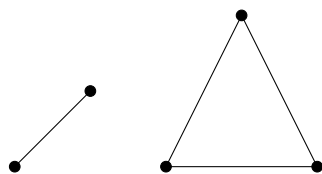


つぶす操作の逆として拡大しても構いません。



このような様々な連続的変形概念は、定義するのは簡単ですが、実際に「変形できる」とか「変形できない」ことを証明するのは容易ではありません。そこで考えられたのが位相不変量やホモトピー不変量などの不変量を使うことです。その代表がオイラー標数ですが、ここでは単体的複体の場合だけ考えることにします。

Definition 1.1 (単体的複体). 単体的複体とは、頂点、辺、面 (三角形), ..., を面と面でピッタリ貼り合せてできた図形のことである。



Definition 1.2 (オイラー標数). 単体的複体 K に対し、 K の n 次元面の数を K_n で表わすとき

$$\chi(K) = K_0 - K_1 + K_2 - \cdots + (-1)^n K_n + \cdots$$

を K のオイラー標数という。

Example 1.3. 線分 I のオイラー標数は1である;

$$\chi(I) = 2 - 1 = 1.$$

□

Example 1.4. 三角形 Δ^2 のオイラー標数も1である;

$$\chi(\Delta^2) = 3 - 3 + 1 = 1.$$

□

Example 1.5. 三角形の縁だけ $\partial\Delta^2$ なら、オイラー標数は0になる;

$$\chi(\partial\Delta^2) = 3 - 3 = 0.$$

□

最も基本的で重要な性質は次のものです;

- 単体的複体 K と L がホモトピー同値ならば $\chi(K) = \chi(L)$.
- よって、 $\chi(K) \neq \chi(L)$ ならば K と L は連続的変形で移りあえない。

このような性質を持つものを不変量 (正確には、ホモトピー不変量) といいます。ホモロジーは、ポアンカレが“Analysis Situs”の中で導入した不変量の一つですが、“Analysis Situs”に登場するアイデアの中でも、最も革新的なものだと言っていいでしょう。

この講演では、ホモロジーが何かは説明しませんが、単体的複体 K に対しアーベル群の列

$$H_0(K), H_1(K), H_2(K), \dots$$

を作ることだと思って下さい。アーベル群も説明しませんが、何か抽象的なものだと思ってもらえればよいと思います。例えば、整数全体 \mathbb{Z} はアーベル群です。

ホモロジーが、オイラー標数より良い不変量であることは、次のホモロジーの性質から分かります。

- $b_n(K)$ を $H_n(K)$ に含まれる \mathbb{Z} の直和成分の数とすると,

$$\chi(K) = b_0(K) - b_1(K) + b_2(K) - \cdots + (-1)^n b_n(K) + \cdots$$

- K と L がホモトピー同値ならば $H_n(K) \cong H_n(L)$.

つまり, ホモロジーはホモトピー不変量であり, 更にそこからオイラー数も得られるのです。このホモロジーから得られる数 $b_n(K)$ をベッチ (Betti) 数と呼びますが, 最近では, 逆に, ホモロジーはベッチ数の categorification である, と言ったりします。

さて, このホモロジーという不変量の登場により, 「グローバルな視点」が一般化しました。ホモロジーは, 単体的複体や多様体のような幾何学的対象に対し, アーベル群を対応させる「関数」のようなものです:

$$H_n : \text{幾何学的対象} \rightarrow \text{アーベル群.}$$

このような視点から, アイレンバーグ (Eilenberg) とステーンロッド (Steenrod) は, ホモロジーの公理系による特徴付けを発見しましたが, アイレンバーグは更にマクレイン (Mac Lane) と共に, このような「関数」を扱う圏と関手の理論を提唱し発展させました。ホモロジーの例でいうと, 各種の幾何学的対象の全体やアーベル群全体は, それらの間の写像も含めて「圏」という構造を持ち, ホモロジーは, それらの間の「関手」というものになっています。このような大域的な視点は, グロタンディーク (Grothendieck) の影響の大きな分野をはじめとして, 数理科学の様々な分野で重要な役割を果していますが, その起源はトポロジーにあったと言っても過言ではないと思います。

1.3 トポロジーは何に使えるのか?

以上で, 独断と偏見に満ちたトポロジーの説明は終わりですが, さて, このようなものは, 一体何に使えるのでしょうか?

- 適当に曲げたりつぶしたりできるのは, 数学としていい加減すぎる!
 - ⇒ キチンと計算して答えを出したい.
- トポロジーで使う不変量は大雑把すぎる!
 - ⇒ 三角形と円と一点が「同じ」では何も区別できないのと同じ.
- 単体的複体全体やアーベル群全体を考えるなど雲をつかむようで, 到底実生活には使えなさそう!
 - ⇒ 確かにその通り.

ところが, トポロジーのアイデアは結構色んなところに使われていたりします。そして, 最近では工学や情報科学にも思いもよらない形で使われたりしています。この講演では, 残りの時間で, まず簡単にトポロジーと他の分野との関係を概観し, その後, 最近盛んになってきたトポロジーと (広い意味の) 工学とのアイデアの交流について説明したいと思います。

2 他の分野との関連

2.1 理論物理学

現在のトポロジーは大きく発展して様々な分野に分かれていますが, その中の多くの分野に影響を与えているのは, 理論物理学でしょう。昔から物理学と数学は深く関連しながら発展してきま

したが、例えば最近 (?) では、ドナルドソン (Donaldson) がゲージ理論を4次元多様体の研究に応用して大きな成果を挙げたのが、記憶に新しいところです。1980年代の話ですが。これは、もちろんトポロジーの応用ではありません。逆に、物理学のトポロジー (幾何学) への応用です。

そして、その後のウィッテン (Witten) の登場により、トポロジーを始めとして様々な数学が影響を受けました。例えば、

- ジョーンズ (Jones) 多項式を始めとした低次元トポロジー
- Dブレーン (D-brane) と K 理論

などです、最近ではラングランズ (Langlands) プログラムに関係したことも研究しているようです。このように、トポロジーに限らず、代数幾何学や数論など様々な分野も大きな影響を受けています。

2.2 生物学や化学

しかし、理論物理学、特に弦理論 (string theory) などは抽象的で、一般の人から見たら数学と区別はつかないのではないのでしょうか。数学の論文も弦理論の論文も、一見ただけでは区別が付きません。数学者と物理学者の間の文化的な壁は、かなり高いように思いますが、そんなことは市井の人々には関係のないことでしょう。

もっと、実生活に近いような分野でトポロジーに関係したものは、何かないのでしょうか？ 一つの例として、分子生物学との関連が挙げられるでしょう。環状DNAの発見、そして結び目になっているDNAの発見により、DNAトポロジーなる分野ができました。アメリカ数学会の機関誌にサムナーズ (Sumners) による解説 [Sum95] があります。そこに、結び目になっているDNAの電子顕微鏡写真もあるので、興味のある方はご覧になってください。3次元の領域の中を連続的に変形しながら動く紐状のもの、ということから、結び目との関係は誰でも想像できますが、実際にDNAの生化学的な性質とトポロジカルな性質の関係が明らかになったのは、驚くべきことだと思います。このような、3次元空間内での変形可能な「図形」としては、高分子も同様です。

2.3 他には？

このDNAトポロジーという分野は、「柔らかな幾何学」というトポロジーのイメージに非常に近いものです。ところが、21世紀になって、全く異なる視点から、工学や情報科学でトポロジーの道具や考え方が使われることが多くなってきました。例えば、以下のようなものです：

- ロボティクス
 - 工場の中のロボットの動きを計画する (robot motion planning).
- 画像認識
 - ホモロジーを用いて図形の形を調べる.
- センサーネットワーク
 - 多数のセンサーで必要な情報を取り出すには？
- 並列処理やデータベースの理論
 - モデル圏の構造.
- ...

3 トポロジーと工学や情報科学

トポロジーと工学と言ったときに、最近では、まず思いつく名前はロバート グライスト (Robert Ghrist) でしょう。2006年にMadridでの国際数学者会議で講演している [Ghr06] ことから分かるように、数学者からも注目されています。

グライストは、

- ロボティクス (robotics)
- センサーネットワーク (sensor networks)
- 流体力学
- ...

などなど、様々な分野にトポロジーの道具を応用することを研究しています。私が彼の講演を聞いたのは、2007年のシンガポール国立大学での、組み紐群の国際会議のときが最初ですが、そのときの講演の最後に

「トポロジーが使える道具だということを工学の人達に宣伝している」

と言っていたのが非常に印象的でした。

そして、トポロジーを工学や情報科学に応用しようとしているのは、グライストだけではありません。例えば、

- Michael Farber (ロボティクス)
- Edelsbrunner, Zomorodian, Carlsson, ... (persistent homology)
- Edelsbrunner, Mischaikow, ... (計算トポロジー)
- Gaucher, Bubenik, ... (並列処理の理論)

などの人達が挙げられます。このように、21世紀に入り、応用トポロジー (applied topology) という分野ができ、急速に発展しています。

時間の関係で全てを説明することはできませんので、残りの時間で、最初の二つについて、例を用いてみていくことにします。

3.1 ロボティクス

一口にロボティクスと言っても様々な視点から様々な問題が考えられます。ここで考えるのは、次の問題です：

問題: 工場の中で特定の通路の上を動く複数のロボットを制御するには？

例を考えてみましょう。

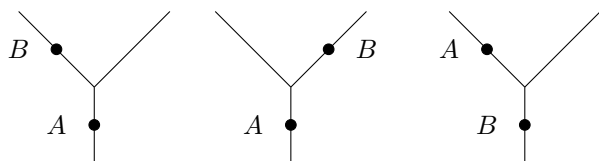
Example 3.1. 誰でも分かるように、直線上の2台のロボットを入れ替えることはできません。



どう頑張っても、入れ替えようとするおつつかってしまいます。

□

Example 3.2. しかし、一箇所分岐を作り Y 字型の通路にすれば、入れ替えられます。



□

このような単純な場合なら、絵を描けば誰でも分かりますが、より複雑な通路により多くのロボットが配置されているときは、どのように考えればよいでしょう？ 例えば、次のような考え方があります：

- グラフ G 上の n 台のロボットの配置を $G^n = \underbrace{G \times \cdots \times G}_n$ の点 (x_1, \dots, x_n) と考える。
- ロボットが互いにぶつからない $\iff x_1, \dots, x_n$ が全て異なる。
- G の n 点の配置空間 (configuration space)

$$\text{Conf}_n(G) = \{(x_1, \dots, x_n) \in G^n \mid x_i \neq x_j \ (i \neq j)\}$$

が n 台のロボットがぶつからないで動ける領域。

- n 台のロボットが同時に互いにぶつからないように動く
 $\implies \text{Conf}_n(G)$ 内の道。

- $\text{Conf}_n(G)$ の「トポロジ的な大きさ」 = ロボットの動きの本質的な自由度。

先程の例で見てください。

Example 3.3. G が線分 I で $n = 2$ のとき、配置空間は線分 2 本の直積、つまり正方形からその対角線を除いた領域です。

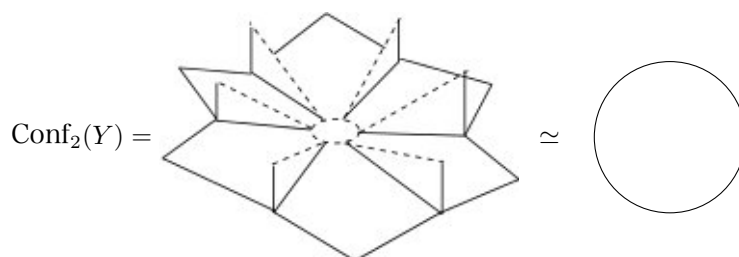
$$\text{Conf}_2(I) = \begin{array}{|c|} \hline A < B \\ \hline \hline A > B \\ \hline \end{array} \simeq \begin{array}{c} \bullet \\ \\ \bullet \end{array}$$

対角線で 2 つの三角形に切れていて、それぞれの三角形は 1 点にホモトピー同値です。よって、線分上の 2 点の配置空間は、連続的変形により 2 点につぶすことができます。

このことから、線分上の 2 台のロボットの本質的な自由度は 0 次元であり、とても窮屈で動きづらいことが分かります。また配置空間が連結でないことから、ロボットを入れ替えることはできないことが分かります。 □

Example 3.4. G が Y 字型のグラフ Y で $n = 2$ のときを考えましょう。この場合の配置空間はちょっと面倒です。 Y は \mathbb{R}^2 に埋め込まれていますから、まともに作れば $\text{Conf}_2(Y)$ は \mathbb{R}^4 の部分空間になってしまい、絵に描けません。 ちょっと工夫して、一度、 Y を分岐点で 2 つのパーツに分け

てから直積を取って対角線で切り、それを貼り合せる、という操作をすれば、 $\text{Conf}_2(Y)$ が次のような 2 次元の図形であることが分かります。



この図の飛び出ている 6 枚の三角形をつぶしてから、真ん中の穴を広げてあげると、円周 S^1 とホモトピー同値であることが分かります。

つまり、Y 字型のグラフ上の 2 台のロボットの本質的な自由度は 1 次元、かつ配置空間が連結であることが分かりました。このことから、2 台のロボットを入れ替えることができることが分かります。その入れ替え方が本質的に 2 通りであることも分かります。□

一般の場合も、ロボット達の本質的な自由度は、グラフの複雑さとロボットの台数で決まっています。それを調べるためには、先程の例の 2 点や円周のような、 $\text{Conf}_n(G)$ の「芯になっている部分」を見付けたいといけません。その芯のモデルとしては、まずエイブラムス (Abrams) の Ph.D. thesis [Abr00] で構成されたものがあります。残念ながら、そのモデルはそれ程効率のよいものではありませんでしたが、2010年に信州大学の古瀬瑞規君が修士論文で $n = 2$ の場合に、改良版を構成してくれました。更に、それを改良すると、一般の n の場合にエイブラムスのものよりずっと効率的なモデルが得られます。それをを用いると、次のグライストの結果の別証が得られます。

Theorem 3.5 (Ghrist [Ghr01], T. [Tam11]). 有限グラフ G の本質的な頂点が v 個のとき、 $\text{Conf}_n(G)$ は、 v 次元以下につぶすことができる。

時間の関係で、「本質的な頂点」の意味はみなさんの御想像にお任せすることにします。例えば、Y 字型のグラフの本質的な頂点は分岐点になっている頂点 1 個だけです。そして $\text{Conf}_2(Y)$ が 1 次元につぶれることは、既に確かめました。

この定理の面白いところは、ロボットの動きの本質的な自由度が、ロボットの台数とは無関係であり、グラフの複雑さだけで決まるということです。

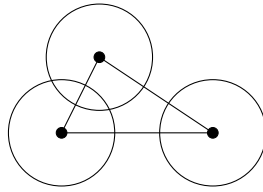
3.2 Persistent Homology

グラフの配置空間で見たように、トポロジーの道具や概念を用いると、「本質的な情報」がうまく取り出せます。逆に、捨て去られている情報もたくさんあります。例えば、形や大きさなどです。ホモロジーのようなトポロジーでよく使う不変量では、三角形と円が区別できません。正三角形と直角三角形を区別するなど論外です。ところが、最近 Edelsbrunner ら [ELZ02] により発見された persistent homology¹ なら区別できるのです。

基本的な persistent homology のアイデアを、誤解を恐れずにこの三角形の場合で説明してみると以下のようになります：

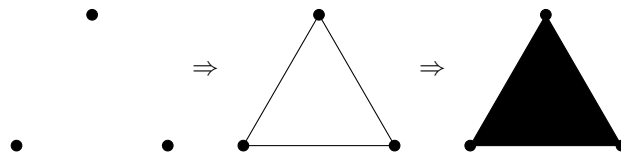
1. $\varepsilon > 0$ を決める。
2. 三角形の各頂点を中心とした半径 ε の円板を描く。

¹市民講演会のときには、できるだけ用語を日本語に直すべきだと思ったので、直訳して「持続性ホモロジー」という言葉を作ってみました。ただ、この訳はあまりしっくりこないもので、ここでは persistent homology をそのまま使うことにします。



3. 二つの頂点を中心とした円板が交わったとき, その二つの頂点を線分で結ぶ.
4. 三つの頂点を中心とした円板が交わったとき, その三つを頂点とする 三角形を塗りつぶす.
5. できた図形ホモロジーを求める.
6. ε を動かしてホモロジーの変化をみる.

Example 3.6. 正三角形の場合, ε を大きくしていくと, 対応する図形の変化は以下のようになります:

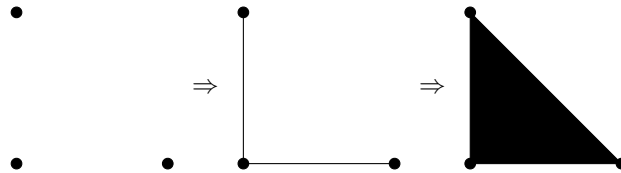


そして, ホモロジーは以下のように変化します:

ε	\rightarrow	\rightarrow	\rightarrow
H_0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
H_1	0	\mathbb{Z}	0

□

Example 3.7. 直角二等辺三角形の場合, 図形の変化は



となり, ホモロジーの変化は, 次のようになります:

ε	\rightarrow	\rightarrow	\rightarrow
H_0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
H_1	0	0	0

□

よって, 1次元のホモロジーの変化に着目すれば, 正三角形と直角二等辺三角形を区別できることとなります. より複雑なデータを処理するときは, 以下のような手順を行ないます:

1. 調べたいデータから, $\varepsilon > 0$ に依存する単体的複体²を作る.
2. ε を変化させたときのホモロジー (ベッチ数) の変化をコンピュータで調べる.

単体的複体のホモロジーは, 組合せ論的なデータで記述されるので, その計算アルゴリズムが各種考えられています. Edelsbrunnerらの論文 [ELZ02]には, 例として, グラミシジンAという高分子の構造を調べた結果が載っています.

²使う単体的複体は, 目的に応じて使い分けます. 三角形の場合に用いたのは, チェック (Čech) 複体と呼ばれるものですが, 他にもビートリス-リップス (Vietoris-Rips) 複体やその変種など, 様々なものがあります.

3.3 センサーネットワーク

センサーネットワークの問題も、グライストとその共同研究者により精力的に研究されています。身近な例えで言うと、携帯電話の基地局が、目的とするエリアをどれくらいよくカバーしているか、といった問題です。基地局に対応するものをセンサーと言いますが、そのセンサー達から単体的複体を作り、その性質をトポロジーの道具を用いて調べることににより、センサーネットワークに関する情報を得ようということが行なわれています。

グライストらは、最近では、オイラー標数に関する積分 (Viroの[Vir88]やSchapiraの[Sch91]), そして層のコホモロジーなどを使おうとしています。残念ながらここでは説明できません。センサーネットワークに興味を持った人には、例えば、グライストと共同研究者によるアメリカ数学会の機関誌での解説 [SG07] がお勧めです。またグライストのホームページにも様々な資料があります。

4 まとめ

トポロジーと他の分野との関係をいくつかみてきたわけですが、さて、トポロジーは「使える」ものなのでしょうか？

トポロジーのアイデアは、数学の様々な分野では、既に陰に陽に様々な形で使われています。最初にお話した (私の個人的な視点による) トポロジーの三つの要素の内、「グローバルな視点」は、生物学や工学ではまだあまり出番は無さそうです。しかし、ホモロジー代数学の基礎としては、代数幾何学や表現論に現れていますし、最近ではルリー (Lurie) らの影響で、高次の圏論に、単体的複体の一般化を用いることが一般的になってきました。古くから考えられている関数解析学での K 理論の利用には、トポロジーの影響を無視できないでしょうし、最近流行の一元数体 \mathbb{F}_1 は、球面のホモトピー群と深く関係したものです。より、具体的な応用としては、グラフの彩色問題などへの応用が挙げられます。これは、組合せ論的代数的トポロジー (combinatorial algebraic topology) という新しい分野ができるくらい大きな流れになっていますが、工学への応用に使われる計算トポロジーとも密接に関係しています。同様のテクニックは、統計物理のモデルを調べるためにも使われています。

このように様々な形で使われるようになったのは、ポアンカレが *Analysis Situs* を書いて100年以上の年月が経ち、トポロジーが「枯れた道具」として使われるようになったから、と言えるかもしれません。ですから、「トポロジー = 柔らかい幾何学」というイメージは、トポロジーを限定しすぎているように思います。更に、ゲルファント (I.M. Gel'fand) が言う³ ように、全ての数学は deformation theory とみなすことができますから、「図形の変形」だけに限定するのは、古い視点かもしれません。

今日お話したことは、まだトポロジーの応用としては未完成なものです。グライスト達の仕事にしても、まだ具体的に工学の成果を得たとは言えないと思います。ただ、理論物理学、生物学、工学、計算機科学など、様々な分野に面白いトポロジーあるいは数学の題材がころがっていて、新しい数学の種として芽生えることを待っているのは確かでしょう。そして、より研究が進めば、実生活直接関係した応用も登場すると思います。

そこで、この講演ではタイトルに対する答えを出す代りに、次の言葉で終りにしたいと思います。

トポロジーとハサミは使いよう

ご静聴ありがとうございました。

³Kontsevich と Soibelman による deformation theory に関する本の草稿で知りました。

References

- [Abr00] Aaron Abrams. “Configuration Spaces and Braid Groups of Graphs”. PhD thesis. University of California at Berkeley, 2000. URL: <http://www.math.uga.edu/~abrams/research/papers/thesis.ps>.
- [ELZ02] Herbert Edelsbrunner, David Letscher, and Afra Zomorodian. “Topological persistence and simplification”. In: *Discrete Comput. Geom.* 28.4 (2002). Discrete and computational geometry and graph drawing (Columbia, SC, 2001), pp. 511–533. ISSN: 0179-5376. DOI: 10.1007/s00454-002-2885-2. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00454-002-2885-2>.
- [Ghr01] Robert Ghrist. “Configuration spaces and braid groups on graphs in robotics”. In: *Knots, braids, and mapping class groups—papers dedicated to Joan S. Birman (New York, 1998)*. Vol. 24. AMS/IP Stud. Adv. Math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001, pp. 29–40. arXiv:math/9905023.
- [Ghr06] Robert Ghrist. “Braids and differential equations”. In: *International Congress of Mathematicians. Vol. III*. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 1–26.
- [Sch91] Pierre Schapira. “Operations on constructible functions”. In: *J. Pure Appl. Algebra* 72.1 (1991), pp. 83–93. ISSN: 0022-4049. DOI: 10.1016/0022-4049(91)90131-K. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049\(91\)90131-K](http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049(91)90131-K).
- [SG07] Vin de Silva and Robert Ghrist. “Homological sensor networks”. In: *Notices Amer. Math. Soc.* 54.1 (2007), pp. 10–17. ISSN: 0002-9920.
- [Sum95] De Witt Sumners. “Lifting the curtain: using topology to probe the hidden action of enzymes”. In: *Notices Amer. Math. Soc.* 42.5 (1995), pp. 528–537. ISSN: 0002-9920.
- [Tam11] Dai Tamaki. “Combinatorial configuration spaces”. In: *Proceedings of the 2011 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2011)*. 2011, pp. 200–203.
- [Vir88] O. Ya. Viro. “Some integral calculus based on Euler characteristic”. In: *Topology and geometry—Rohlin Seminar*. Vol. 1346. Lecture Notes in Math. Berlin: Springer, 1988, pp. 127–138.
- [村杉邦82] 村杉邦男. 組み紐の幾何学 – 実用から位相幾何の世界へ –. Vol. B-500. ブルーボックス. 講談社, 1982. ISBN: 4-06-118100-9.