# 授賞報告

## 2013年度代数学賞

2013年度代数学賞は，荒川知幸氏（京都大学数理解析研究所），市野篤史氏 (京都大学大学院理学研究科) の２名が受賞されました．

### 荒川知幸氏　「無限次元リー代数および $W$ 代数の表現論の研究」

荒川知幸氏は，アフィン・リー代数や Virasoro 代数のような無限次元リー代数やその量子群，および無限次元リー代数の拡張概念である $W$ 代数の表現の研究において卓越した業績を挙げています．

$W$ 代数は，1980年代に Virasoro 代数の拡張概念として共形場理論の中に生まれました．有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随するアフィン・リー代数 $\widehat{\mathfrak{g}}$ から，無限次元リー代数の拡張概念である頂点代数 $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ が定まり，$W$ 代数と呼ばれます．当初は各々の $\mathfrak{g}$ ごとに個別に，生成元を具体的に与えることで $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ を定義していましたが，Feigin–Frenkel は1990年にある種のコホモロジーを用いて $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ の統一的な定義を与えることに成功しました．さらに，この手法により $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現の圏から $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ の表現の圏への関手が自然に定まります．これにより $W$ 代数の表現論の基礎が確立されました．ここを出発点として荒川氏の活躍が始まります．

この時点でのもっとも基本的な問題は，上に述べた関手の完全性を示すことと，それから得られる表現の具体的記述でした．これに関しては Frenkel–Kac–脇本による予想があり，特に Feigin–Frenkel 構成から定まる表現がモジュラー不変な表現になることが期待されていました．荒川氏は，まず高次コホモロジーの消滅を示すことにより関手の完全性を確立し，さらに $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約最高ウェイト表現に対応する $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$ の表現の既約性を示すとともにその具体的記述を与えて，Frenkel–Kac–脇本予想を完全に解決しました．また，超リー代数に対する対応する問題（Kac–Roan–脇本予想）に対しても，同様の結果を確立しました．これらは，$W$ 代数に関する基本問題を解決する著しい業績であり，$W$ 代数の表現のより深い研究が可能になりました．

その後，荒川氏は Malikov とともにいわゆる Beilinson–Bernstein 対応（有限次元単純リー代数の表現と旗多様体上の $D$ 加群の対応）の頂点代数への拡張に関する一連の研究を，また，Fiebig とともに，アフィン・リー代数の臨界レベルの既約最高ウェイト表現の指標に関する研究を行っています．最近では，$W$ 代数から定まる $C_2$ 代数の研究も行っています．$C_2$ 余有限性条件の詳細な研究，$C_2$ 代数とベキ零軌

道との関係の確立等の業績があります．この研究により $W$ 代数がベキ零軌道を通じて表現論における他のさまざまな理論と結びつくことが期待されます．

$W$ 代数は，共形場理論等への応用において重要なだけでなく，今後の表現論の一つの方向性を示唆するキーパーソンとしての役割を担っています．荒川氏は，$W$ 代数に関する基礎的問題を解決するとともに，さらなる精力的研究により，分野全体の発展に寄与する多くの重要な貢献をなしています．この分野での氏の貢献は多大であり，代数学賞にふさわしいものです．

## 市野篤史氏　「保型表現とその周期の研究」

市野篤史氏は保型表現の研究，とくに保型形式の周期について優れた業績をあげています．代数群上に定義された保型形式の周期とは，保型形式を部分代数群上で積分して得られる不変量のことです．たとえば，保型形式の Petersson 内積は周期の一種であると考えることができます．市野氏は池田保氏との共同研究で，ある種の Hermite 保型形式と Siegel 保型形式の Petersson 内積を考察し，それを L 函数の特殊値を用いて明示的に表しました．また，斎藤・黒川リフトの対角集合への制限と一変数の保型形式の Petersson 内積を L 函数の特殊値で与える簡明な公式を証明しました．

市野氏が考察したこれらの周期は Gross–Prasad 型といわれるものになっています．Gross–Prasad 型の周期とは，特殊直交群 SO(n+1) と SO(n) の直積上の保型形式を SO(n) 上で積分してできる周期のことです．1990 年代の初め Gross と Prasad はこのような周期を考察し，その非消滅性とテンソル積 L 函数の中心特殊値の非消滅性が同値であるという予想を提出しました．この予想は保型形式の周期の定性的研究において大変興味深いものであり，現在に至るまで盛んに研究されています．しかし，周期と L 函数の特殊値の間の明示的な関係は知られていませんでした．

市野氏は上記の研究成果に基づき，Gross–Prasad 型の周期を L 函数の特殊値で明示的に表す一般的な予想を池田氏と共同で提出しました．この予想は保型形式の研究者に驚きをもって迎えられ，現在では保型形式の周期の研究の主要な目標の一つとされています．市野氏はさらに研究を進め，SO(4) と SO(3) の組の場合には上記の予想を解決しました．これは 3 重積 L 関数の中心特殊値に関して従来知られていた結果をすべて含む一般的なものであり，極めて興味深いものであるといえます．また，W.-T. Gan との共同研究においても SO(5) と SO(4) の組の場合に上記の予想を特別な場合に証明しています．

市野氏は周期の理論の局所的類似として，局所体上の簡約代数群の 2 乗可積分表現の形式次数を考察し，それが対応する Langlands パラメータの随伴表現の L 函数

の局所函数等式に現れる$\gamma$因子と本質的に一致する，という予想も定式化しました（平賀郁氏，池田氏との共同研究）．2乗可積分表現の形式次数は多くの場合に計算されていますが，その計算結果をたった一つの式で書き表すというようなことはそれまで試みられていないものでした.

　また，市野氏の Siegel–Weil の公式に関する一連の研究も Skinner による保型形式の岩澤理論に応用されるなど，高く評価されています.

　このように市野氏は保型表現の研究において代数学賞にふさわしい顕著な業績をあげています.

（代数学賞委員会委員長　向井　茂　京都大学数理解析研究所）