授賞報告

2014年度代数学賞

2014年度代数学賞は，古庄英和氏（名古屋大学大学院多元数理科学研究科），吉野雄二氏（岡山大学大学院自然科学研究科）の2名が受賞されました．

古庄英和氏
「Grothendieck–Teichmüller 理論と多重ゼータ値に関する研究」

古庄英和氏は，Grothendieck–Teichmüller 群 GT と p 進多重ゼータ値の分野で大きな成果を上げています.（GT と呼ばれる群は複数ありますが，ここでは Drinfel'd の導入した pro-unipotent バージョンを指すことにします.）古庄氏の大きな成果のひとつは，GT の定義に現れる pentagon 関係式（S_5 対称性に対応するもの）から，組合せ論的な関係式である double-shuffle 関係式が自動的に従うという結果です．これは，少なくとも10年以上にわたって，Deligne, Zagier, Goncharov らの著名な数学者達が取り組んできた問題です.

古庄氏の証明は，4点付きならびに5点付きの射影直線のモジュライ空間の de-Rham 基本群を Bar Construction を使って具体的に記述し，それらの関係式を求め，2変数多重ポリログ関数の関数等式という解析的な等式を用いて，その特殊値を取ることで double-shuffle 関係式を導くものです．この筋書きは，Grothendieck が Esquisse d'un programme で示唆したところの Lego–Teichmüler 理論の哲学に沿ったものです．さまざまな曲線のモジュライ空間同士が，退化や点の忘却を介して結びついているため，その関係や対称性によって保たれるものとして，有理数体の絶対ガロア群やモチーフのことがわかるだろうという哲学です.

この哲学の一つの題材として，整数環上到るところ smooth な mixed Tate motif のカテゴリー MTM があげられます．MTM の淡中基本群は，射影直線ひく3点の基本群から得られる混合モチーフ P に作用します．この作用の像がどのくらい大きいか，というのが基本的な問題です.

この作用が忠実であるというのが Deligne–伊原の予想であり，Francis Brown により2012年に解決されました．この作用の像は，double shuffle 関係式をみたし，また，Pentagon 関係式，Hexagon 関係式をみたします．ここで，Pentagon 関係式，Hexagon 関係式をみたすモチーフ（の de-Rham 実現）の自己同型群を Grothendieck–Teichmüller 群と呼び，double shuffle 関係式をみたすモチーフの自己同型群を double shuffle 群と呼びます．計算機実験により，double shuffle 群，GT，MTM の淡中基本群の三つは，重み filtration に関して次数付き商をとると，計算された範囲内では一致することが知られています．そして，これらの群は，すべて一致するのではないだろうかと考えられています.

そこで，これらの関係式のどれが一番強いのか，どれも同値なのか，といった問題が自然に現れてきます．現在得られている大きな結果は二つあり，一つは，冒頭に述べた pentagon 関係式から double-shuffle 関係式が従う（従って，Grothendieck–Teichmüller 群が double shuffle 群に含まれる）という結果で，もうひとつが GT の定義関係式の一つである Pentagon 関係式から，GT の残りの定義関係式である Hexagon 関係式が従うという，これも古庄氏による結果です．

これらの研究に先立って，古庄氏は p 進多重ゼータ値の導入という大きな成果を上げています．Drinfel'd による KZ 方程式の解としての Drinfel'd アソシエータの理論により，多重ゼータ値は上記の混合モチーフの Hodge 実現の周期として理解されます．混合モチーフの Hodge 実現，etale 実現については，Deligne, 伊原らによる研究がありましたが，p 進実現は古庄氏により初めて定義されました．そこでは，Coleman の p 進積分を主な道具として，p 進 KZ 方程式，p 進 Drinfel'd アソシエータの理論が展開され，その周期にあたるものとして p 進多重ゼータ値が定義されます．さらに，古庄氏はこれらが double shuffle 関係式をみたすことや，これらの淡中圏的解釈など，深くかつオリジナリティの高い研究を展開されています．

このように，Lego–Teichmuüller 哲学を具現し予想を解決していく古庄氏の業績は，代数学賞を受賞するにふさわしいものです．

吉野雄二氏
「Cohen–Macaulay 表現論の研究」

1970 年代，Auslander や Gabriel らを中心にして，環の表現論分野が創成されました．これは箙の道多元環や Cohen–Macaulay 環を代表例とする整環を扱うものであり，代数群・量子群の表現論をはじめとして，可換環論・代数幾何学，数理物理学など，隣接する諸分野と相互に影響を与えながら発展を遂げてきた分野です．例えば近年のクラスター代数の圏論化への応用は記憶に新しいところです．

吉野氏は，可換環論を主たる道具としながら，環の表現論の指導者として長年活躍をされてきました．

まず最初に言及すべきは，著書の『Cohen–Macaulay modules over Cohen–Macaulay rings』です．本書は，環の表現論の一分野である Cohen–Macaulay 表現論の定番の教科書として知られています．通常，環の表現論の教科書は有限次元多元環に限定して理論を展開していますが，本書は，吉野氏の可換環論研究者としての視点から書かれており，可換環論・代数幾何学における古典的手法と，Auslander, Gabriel 以降爆発的に発展した表現論の手法が絶妙にブレンドされており，多くの研究者から聖典として崇められてきました．

著書では，有限次元多元環の表現論で基本的な Auslander–Reiten 理論の秀逸な解説をはじめ，吉野氏自身による Cohen–Macaulay 加群に対する Brauer–Thrall 第

一予想の解決，2 次元単純特異点上の直既約 Cohen–Macaulay 加群の分類論（代数的 McKay 対応），Orlov によってミラー対称性予想への応用が見出された行列因子の理論，Auslander–Buchweitz 近似理論などが解説されています．これらはいずれも近年重要性を増しているものばかりです．また，本書を介して間接的に吉野氏が及ぼした影響力にも計り知れないものがあります．日本国内の環論において，本書で展開された Cohen–Macaulay 表現論が注目される以前には，可換環論と非可換環論およびその表現論の間には，ほとんど交流が見られませんでした．現在のように環論の諸分野を結びつけたのは，吉野氏の功績だと言えます．

吉野氏の主要な業績として，著書でも解説されている Cohen–Macaulay 加群に対する Brauer–Thrall の第一予想に関する研究が挙げられます．これは，1940 年代に提唱された有限次元多元環に関する予想で，Roĭter によって肯定的に証明されています．吉野氏は，これを Cohen–Macaulay 環上の Cohen–Macaulay 加群に対して考察し，対応する問題を解決しました．すなわち，孤立特異点であるような無限 Cohen–Macaulay 表現型の Cohen–Macaulay 局所環上には，各自然数 n に対して，重複度が n 以上の直既約 Cohen–Macaulay 加群が存在することを証明しました．証明には代数的整数論における different の概念，Hochschild コホモロジー論，Auslander–Reiten 理論，そして Artin 多元環の表現論を駆使する壮大なもので，この仕事により吉野氏の名が表現論界に知れ渡ることになりました．

また，近年の顕著な業績として，伊山修氏との共同研究である三角圏における変異理論の構築があります．現代の環の表現論で中心的な役割を果たしている高次元 Auslander–Reiten 理論における基本対象であるクラスター傾加群を考察し，三角圏のクラスター傾対象に対する変異操作を定式化しました．この結果により，3 変数べき級数環の 3 次 Veronese 部分環および 4 変数べき級数環の 2 次 Veronese 部分環のリジッドな直既約 Cohen–Macaulay 加群が完全に分類されました．これは，今までなかなか手の付かなかった 3 次元以上の Cohen–Macaulay 表現論における画期的な成果です．また，この研究において構築された変異理論は，Cohen–Macaulay 表現論のみならず，クラスター代数の圏論化においても欠かせないものになっています．

その他にも吉野氏は，今世紀に入ってからの中心的な仕事である，加群の変形および退化の代数的な理論体系の構築をはじめ，可換環のホモロジー代数に関する Auslander の数々の仕事の進展や局所コホモロジー論の深化など，多くの成果を上げています．このように，吉野氏の業績は，代数学賞に誠にふさわしいものです．

（代数学賞委員会委員長　北詰正顕　千葉大学大学院理学研究科）