書　評

BLUE BACKS

連分数のふしぎ

木村俊一 著，講談社，2012 年

筑波大学数理物質系

秋山　茂樹

個人的なことで恐縮であるが私は大の散歩好きで，大学近辺の田舎風景の中をいつもぶらぶらしている．散歩の間，ぼっと問題を考えていることも多い．勝手に自負しているだけだが，大学周辺の細かい道のどれが一番排気ガスを吸わず，犬に吠えられず，緑が多くて気持ちがよいかを一番良く知っていると思う．新しい道，景色を発見すると，すがすがしい気持ちになる．

本書を読んでこれは「まさに数学の散歩」ではないかと思った．連分数という題材で数学者が自分なりに楽しんで漫遊した結果を本という形式で見せているのである．

まず本書の「数あて」からの連分数へのアプローチは楽しく数学本の読者層をかなり広げる効果があるのではないかと感じる．「数あて」とは与えられた小数から，その数が何であるのかを当てるクイズである．たとえば

$$0.216560509554140127...$$

とかいう小数をみたとき，この数字が何であるかを当てよというクイズだ．本書を読めば 34/157 と容易に推定できるようになる．

連分数は分数の分母に単位分数が次々入れ子のように現れる数の表現である．たとえば円周率は

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \dots}}}}$$

というように表される．連分数は初等整数論の格好の題材である．これまでの連分数を扱う数学本は連分数の収束，互除法との関係，格子点による近似，ペル方程式，二次体の単数，また本によってはエルゴード理論との関係などを順に記述するものが多かった．これが数学的近道であって組織的な方法である．本書でも，これらの話題

の一部は扱われているが，これまで行われてきた最短の説明はほとんど採用されない．最短距離の道は息が詰まるので，遠回りの散歩道を漫遊するのだ．

その効用を本文からの引用で説明してみよう．二次方程式を解く前に，まず一次方程式である．

「太郎君は，家から 12 分のところにある池まで行って，池を 5 周回って家に帰って来たところ，54 分かかったという．歩く速度は一定として，太郎君は池を一周するのに何分かかったでしょう」

これを二通りに解く．最初はゆっくり意味を考えながらの算数の方法，次に一次方程式を立てて形式的に解く．そして「一次方程式は無味乾燥」という意見がでてくる．「算数の方法では解いている間に様々な別の景色が見える」という．

自分が数学を人に説明するときに，このような散歩をしているだろうか．このような散歩の中に様々な新しいことが見えてくるというのが筆者の立場なのだ．そしてその方法が，いろいろな連分数にまつわる話題の説明でも一貫して行われる．ぜひ真似をしてみたいものだと思う．数学的内容の説明でも，式をたどるのではなくその意味を一歩一歩確かめる．すると，その途中で別の道を見つけることもある．これが新しい発見を産むこともあるだろう．

この本の扱う話題は大変多彩で知る限り連分数にまつわる話題のほとんどが網羅されている．特に感銘を受けた事をいくつか紹介しよう．一つは音階の話である．一オクターブは波長が二倍であるため，同じ音に聞こえる．有理数倍の波長は和音として心地よい．音の波長比が簡単な有理数となるものが多く現れる音階は，音楽を奏でるのにふさわしい．では一オクターブをどのように分割するべきか．本書ではピタゴラス音階，純正律，平均律という概念の発展を分かりやすく説明してあり，私は初めて意味がよく分かったような気持ちになった．（しかも，ピタゴラスの発見説に重大な疑義まで (!) が指摘されている．）この説明のあとにやっと連分数の登場だ．平均律では，$2^{1/12}$ 倍のスケールで一オクターブを分割する．歴史をみればこれは和音を美しくする奏でることと，楽器での操作性の調和をとった妥協の産物である．和音の共鳴を重視すれば純正律の方が良いはず．有理数比の和音にこだわりすぎると複雑すぎて使える音階とならないのでどこかで妥協点を見つけるのだ．この本では

もう一段階精度の高い連分数をもちいて $2^{1/53}$ の平均律が説得力をもって提案されている．現在のデジタル楽器の発展から考えれば 1/53 音階を実装することは難しくないのではないだろうか．私のような音痴では違いは分からないだろうが，もしかすると将来の素晴らしい音楽を産むかもしれない．読んでいて高次連分数の研究者の田村純一先生が，以前に西洋音階以外の音階を包含するような新音階を類似のアイデアで発案されていたことを思い出した．次回お会いした時にこれも記録に残すよう是非説得しようと思った．

もう一点感銘を受けたのは葉序の記述である．葉序とは，木や草を上から見たときに，どのような方向に新枝が出現するかの規則を表す．もちろん偏って枝がでれば全体が傾くので，いろいろな方向に順にでるのだが，その出方が円周の有理数倍の方向ならば上の枝が下の枝の採光を邪魔するのであまりよろしくない．これは無理回転による点列の一様性からの誤差（Discrepancy）を小さくするという数学上の問題と関係があるのではないかと想像される．おそらく似たような理由でひまわりの種の配置にフィボナッチ数列が現れる．これを納得してみたいというのがこの章の動機だ．例によって天下りの発想はない．まずは葉序の簡単な「らせんモデル」を考案し有理数回転の場合から始めて実験をしてみる．すると有理数を用いるとどうも最初は良くても後の方で空隙が多くなって光を受ける面積が減って無駄になる．次に無理数回転の場合にも実際にやってみる．すると有理数よりは効率が良いことがはっきり感じられる．しかし無理数でも隙間の大きい悪いものが出てくる．ここで連分数の登場だ．黄金比が有理数によって最も近似しにくい数であることが分かる．読者は黄金比らせんでの実際の配置を見た瞬間「ああこれこそがヒマワリ」と実感する．絵をみれば皆，驚くに違いない．紹介のため引用したいところだが，販売に逆効果になるといけないのでやめておこう．この文章を読んだ方は是非書店で手にとってご覧になることを強くお勧めする．

数学に興味があるが専門家ではない人たちは多い．この本はさらに広く数学好きを増やそうと企図されている．数学者が，何百，何千倍もの人数の数学ファンに囲まれていれば，その地位ももう少し良いものになるのではないか．近頃，大学は競争的環境にさらされ世知辛い話ばかりを聞かされることが多くなった．数学者には生きにくい世の中である．遊び心を忘れず，数学ファンとも良好な関係を保っていくことは将来のためにも大切なことだ．この本が，そのような数学ファンとの交流に資する一冊であることは疑いの余地はない．