書　　評

広がりゆくトポロジーの世界
—言語としてのホモトピー論—

玉木　大　著，現代数学社，2012 年

岡山大学自然科学研究科
島川　和久

本書の帯のキャッチコピーは「コーヒーカップとドーナツを同じと思うのがトポロジーなのでしょうか？ 本書は，そのような古いトポロジーのイメージへの挑戦状です」という刺激的なものである．その謳い文句通り，本書は専門外の読者を主な対象として想定しつつも，通常の入門書とは大きく異なる先進的な内容の事項を取扱っており，意欲作と呼んで間違いない著作となっている．

以下に各章のタイトルとその内容を簡単に紹介したい．

1 トポロジーとは何か？　トポロジーの視点とは何か，また，トポロジーの進むべき道はどのようなものか，について本書で取り扱うテーマの紹介である．

2 ホモロジーのアイデア　多様体のホモロジーに関する Poincaré の幾何学的なアイデアがどのような変遷を経て，一般ホモロジー論や一般コホモロジー論の概念に至ったかを述べる．

3 ファイバー束とホモトピー　ファイバー束とその分類定理（すなわち，ファイバー束の同値類の集合と底空間から分類空間への連続写像のホモトピー類の集合が 1 対 1 の関係にあること）を紹介し，その構成の過程で抽出される「ファイブレーション」,「コファイブレーション」,「ホモトピー同値」の 3 つの概念がモデル圏の概念の端緒であることを述べる．

4 分類空間について　空間のジョインを用いるミルナー構成から始まって，小圏の分類空間という，より一般的な枠組みに適合し得る形で定式化されるまでの主ファイバー束の分類空間の構成法の変遷を振り返る．

5 関手の微積分　Goodwillie は，ホモトピー極限やホモトピー余極限といった構成を駆使して，関数ならぬ関手に対する微分の概念を導入し，驚くべきことに，お馴染みのテイラー展開と類似の構成がカテゴリー間の関手に対しても行えることを示した．これは単に理論的に興味深いだけでなく，具体的な問題への応用の面でも成果を挙げ注目を集めている．

6 何でもモデル圏　本書の中心的なテーマであるモデル圏の定義と例（位相空間の圏，単体集合の圏，鎖複体の圏など）を振り返る．

7 並列処理とホモトピー　計算機における並列処理に関する重要な問題の一つに，排他制御によるプロセスのスケジューリング可能性の問題がある．もともとホモトピー論の研究者であった J. Gunawardena は，スケジューリングをプロセス・グラフ上の道として表すことにより，スケジューリングの研究にホモトピーの概念が活用できることを示したが，さらに，このような手法と密接に関連するモデル圏の構成法が Goubault や Gaucher 達によって提唱されている．

8 多重ループ空間からオペラッドへ　この章では，モデル圏から一旦離れ，多重ループ空間のホモトピー型を調べる上で中心的な役割を果たすオペラッドの概念を解説し，さらにそれが位相空間の枠組みを越えて様々な分野で応用される様子を解説する．

9 ホモトピー的代数　本章の表題である「ホモトピー的代数」は，Quillen の “homotopical algebra”（ホモトピー代数）の翻訳ではなく，“homotopy algebra” の翻訳とのことである．ホモトピー的代数は，端的に言えば，加群や鎖複体などの代数的構造を，オペラッド等の概念を用いてホモトピー化する（等号を「ホモトピック」で置き換える）操作であり，その典型例である A_∞ 代数や深谷氏の A_∞ 圏の理論は現代数学の一つのハイライトである．

10 組み合せ論と代数的トポロジー，11 超平面配置と有向マトロイド　近年，組み合せ論に起源をもつ幾つかの問題において，代数トポロジーの手法を応用した目覚ましい成果が上がりつつある．ここでは，そのような研究の例として，グラフあるいは有向グラフ（ quiver）から構成されるグラフ複体，associahedron, permutohedron 等の組み合せ論的構造を記述するために導入された凸多面体，および超平面配置やそれを起源とする（有向）マトロイドの理論を取り上げる．

12 トポロジーと工学　前 2 章に引き続き，代数トポロジーの応用の拡がりの例として，自律走行ロボットの制御，およびセンサー・ネットワークに関する Ghrist の仕事を取り上げ，代数トポロジーの工学分野の応用について解説する．

13 ストリング・トポロジー　自由ループ空間のホモロジーの代数的構造，とりわけストリング積について解説する．

14 高次の圏とホモトピー論　位相的場の理論はコボルディズム理論の言葉を用いて次のように定式化される．n 次元多様体を対象とし，多様体間のコボルディズムの微分同相類を射とする圏を Bord^{n+1} で表し，「コボルディズム圏」とよぶ．Bord^{n+1} は多様体の直和により対象モノイド圏であり，Bord^{n+1} から別の対称モノイド圏 $\mathbf{C}$ へのモノイド構造を保つ関手 $\mathrm{Bord}^{n+1} \to \mathbf{C}$ が，（$\mathbf{C}$ に値をもつ）$n+1$ 次元の位相的場の理論である．このような位相的場の理論を発展させるためには「高次の圏」による理論の精密化が必要不可欠である．著者の定義に従えば，「高次の圏」は数学の発展の第 4 段階（自然数から出発した数の概念の様々な拡張が第 1 段階，集合と写像の概念の使用が第 2 段階，それらが圏と関手に取って代わるのが第 3 段階）の主要アイテムであり，それを取り扱うための基本的な記述言語の役割を担うことが，ホモトピー論が果たすべき役割である，というのが著者の主張である．

以上のように，本書で取り扱う事項は通常の入門書のそれとは大きく異なり，本来であれば専門家向けの内容のものである．それにも拘わらず，専門外の読者でも楽しんで読み進められるよう平易に解説する著者の筆力に舌を巻かざるを得ない．間違いなく好著である．