

書 評

圏論の歩き方

圏論の歩き方委員会 編集, 日本評論社, 2015 年

大阪大学大学院理学研究科
安田 健彦

本書は様々な著者による 17 章からなるオムニバス形式の圏論の入門書である。まえがきによると「情報処理能力をはるかに超えた量の情報の洪水」と「トライ・アンド・エラーの機会」に力点を置いているようだ。実際に読んでみると、確かに全体的にかなり歯ごたえのある印象で、ほとんど理解できなかった章もある。もちろん章によって難易度に違いがあり、またなじみのある話題もあれば、全く初めて聞くものもあった。「決して最初から一つ一つ完全に理解しようとしなくてください」ということなので、そのつもりで流し読めば、様々な分野で圏論が応用される様子が垣間見ることができる。これから圏論を本格的に勉強しようという学生が、まず最初に漠然とした印象を形成するのに役立つだろう。この本を読んだ後は、本書で挙げられてる、複数の圏論の入門書のうちのどれかを選んで読めば良さそうである。私自身は圏論がテーマの教科書としては S. MacLane の *Categories for the Working Mathematician* (Springer) ぐらいしか知らなかったが、最近は良い入門書がいくつか出ているようで、これから勉強する学生達が羨ましい。

第 1, 8, 16 章は「座談会」というインフォーマルな会話形式で、最終第 17 章も「圏論のつまづき方」という題で、同様に会話形式である。それ以外の章は、第 2 章で圏の定義を解説する以外は、圏論が活躍する様々な分野を紹介する中で、圏論の鍵となる概念の説明も試みるというスタイルになっている。分野としては、位相幾何学、計算機科学、論理学、物理学、表現論、生物学などがある。変わり種として、第 12 章では圏論と教育の関連を論じている。このように、本書は標準的な圏論の教科書ではないので、それを期待して本書を開いた読者は拍子抜けするかもしれない。また、各分野の面白いところに到達するために内容を詰め込む必要があったようで、その分内容が濃く展開が速くなりがちである。著者達も、いかに限られたスペースで話をまとめるかに苦労したことだろう。それでも、もう少し内容を絞ってわかりやすくできなかったのかと思わされる部分もあるが、全体としては面白い読み物にまとまっている。圏論に入門したい学生でなくても、誰が読んでも幅広い話題の中から何か新しい知見が得られるだろう。

圏は集合と並ぶ現代数学の基礎であり、あらゆる分野に顔を出す。研究者の間ではある程度の知識は常識となっている。さらに本書で紹介されるように、その応用範囲はいわゆる

「純粋数学」の外へもどんどん広がっているようだ。私の専門である代数幾何でも、60年代のグロタンディークによる革命により、圏論が代数幾何の基礎を支える大きな構成要素となっている。このように、現代数学に必要不可欠な圏論だが、大学の正規のカリキュラムで教えられることは、ほとんどないと思う。大学院生の頃に、専門書や論文など読むうちに、必要が出てきたら適当な文献に当たり勉強するというのが標準的な勉強の仕方になっているのではないだろうか。しかし、文献では通常、理論の背後にある「気持ち」を説明してくれることはなく、周囲に適切な助言者がいない人には圏の感覚をつかむのは大変だろう。（圏論をカリキュラムに組み込めば、そこから圏論に対して新しい感覚を身につけた世代が育つのだろうか、と創造してみるがどうなのだろう。）「圏論の歩き方」は、そのような圏論の「気持ち」を伝えることもテーマの一つにしている。例えば、圏論では多くの概念が可換図式と普遍性により定義される。しかし、これは初学者には抽象的でわかりにくい。本書の最終章「圏論のつまづき方」の「可換図式の「筆順」」で、このような定義を直積の定義を例に取り丁寧に解説している。それから、個人的にこれは便利だなと思ったのは、第2章で紹介されている同値を示す2重線記法や同様の1重線記法だ。最近、本書を含め何度かこの記法を目にする機会を持ったが、それまでは全く知らなかった。

ここで、私が特に興味を持った3つの章の内容について見ていこう。まずは、第5章「モノイドと計算効果」（著：勝股審也）。モノイドという圏論の概念は50年代後半のホモロジー代数における standard construction というものに端を発するらしい。この章では、モノイドがプログラミングにどのように応用されるかを概観する。プログラムは引数を受け取り返り値を返す「写像」のようなものである、というのがプログラムの表示的意味論（これは第4章で解説されている）の基本的なアイデアだが、それ以外にも文字出力やエラーなどの「計算効果」と呼ばれる様々な現象を扱う必要がある。広範囲のこのような現象をモノイドを用いてモデル化できるということを、Moggi が1989年に発表して、この分野に大きなインパクトを与えたい。この章ではモノイドがどのように文字出力とエラーを制御するかを例を用いてわかりやすく説明している。また、モノイドの定義では、圏論の基本概念である関手の間の「自然変換」が登場するが、その解説もこの章で行われる。章末のQ&Aでもさらに自然変換や圏の同値などについて説明している。モノイドは実際に Haskell という関数型プログラミング言語で活用されていて興味深い。実は私は以前に Haskell でプログラムを書いたことが一度だけあり、モノイドについてもそのときに目にした。しかし、よく理解できず、モノイドが登場するコードは「おまじない」とみなして済ませたことがあった。この本を読んで多少理解できたので、また Haskell で遊んでみたくなった。

第12章「全ての人に矢印を：圏論と教育をめぐる冒険」（著：西郷甲矢人）は、数学教育にまつわる面白いエッセイだ。「比喩 = 関手」という標語などを用いて、圏論的発想が教育

現場で生かされる可能性を論じている。物理量「mol」の説明と圏を絡めたり、負の数や虚数を説明するために、「数」を「働き」とみなす見方を現代数学の大きな流れに関連づけるなどする。特に数学的に難しいところはなく、楽しい軽快な読み物となっている。著者と同じく大学で数学を教える教員は特に楽しめるだろう。

第14章「表現論と圏論化」(著:土岡俊介)は、私の専門分野に少し関連していて個人的に興味を持った。ここでは表現論における圏論化を論じている。圏論化とは例えば、ある種の整数をあるベクトル空間の次元と解釈し、二つの整数間の等式をベクトル空間の間の同型射から導くというぐあいに、ある数学的対象(数や等式)を、より豊かな圏での対応物(ベクトル空間や同型射)の「影」と見なすこと、またそのような圏を構成することだ。圏論化のハイライトは非負性の証明で、この章で例を用いて説明している。非負性とは、ある数が整数であることは定義からすぐに従うが、それが実は非負になる非自明な主張のことである。章の後半はモジュラー表現の最近の話題にまで触れている。その部分は完全な理解が難しかったが、分野の進展の様子が垣間見られて面白い。Q&Aで引用されているR. Hartshorneや志村五郎の数学の発展に関する名言にも興味を持った。

先に述べたとおり、本書は座談会、Q&A、そして「圏論のつまづき方」と会話形式の部分がある程度の割合を占めていて、その他の「普通」の数学の(どうしても難しくなりがちな)記事をうまく補っている。数学の部分が理解できなくても、これらの会話部分だけでも面白く読める。本書の難解さへの自己批判や圏論の限界などについても、ざっくばらんに語っている。文献の読み方や数学での「理解」とは何かといった、研究者が苦勞しながら身につける事についても議論していて、研究者の卵達には有益な情報だろう。第16章で語られる「圏論の長射程のありがたさ」など、数学を大局観に眺めた議論もされる。分野が細分化されがちな現代の数学では、このような議論の重要性が増しているように思う。