第21回藤岡おもしろ数学教室

近道とシャボン膜の数学

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所
小磯　深幸

第21回藤岡おもしろ数学教室は，藤岡市と藤岡市教育委員会の主催，日本数学会と関孝和先生顕彰会の後援により，2016年10月14日（金）に藤岡市立小野中学校体育館で開催されました．主な聴衆は同中学校の生徒さん達約300名でしたが，市内外から一般の方々10名程が参加されていたようでした．また，実験及び実習の助手として，九州大学大学院数理学府博士後期課程2年生・赤嶺新太郎君と同修士課程1年生・照屋靖志君に同行いただきました.

演題は「近道とシャボン膜の数学」とし，実験・実習を含め1時間余りの講演を行いました．抽象的な目標は，身近な話題を用いて数学の汎用性や「証明する」ことの意義を知ってもらうこと，数学を学ぶことにより得られるわくわく感や今後さらに数学を学ぶことに対する期待を感じてもらうことでした．具体的には，あらかじめ藤岡市教育委員会にお知らせしておいた以下の講演概要にある課題を取り上げました．「二点を結ぶ最短線はまっすぐな線分です．では，三点を結ぶ最短線はどのような線でしょうか？　四点を結ぶ最短線は？・・・　さて，この問題の次元を一つ上げて，線の問題を面の問題にすると，シャボン膜の数理モデルの形を調べる問題となります．本講演では，シャボン膜をお見せしながら『近道とシャボン膜の数学』の考え方と応用についてお話ししたいと思います.」

当日の講演では，ワークシートを使った作業やシャボン膜の実験を取り入れることにより，最小解の持つ性質に納得したりその美しさに感動したりできるように，そして何よりも，できるだけ多くの生徒さん達に興味を持って参加していただけるよう務めました．また，シャボン膜の実験により観察した最短ネットワークの性質について，数学的な定式化と証明を与えることにより，その結果が広く応用できるということを説明しました．学年により取り組み方や理解の程度・種類が異なることは予想していた通りでしたが，全員ではないかと思われるほどの生徒さん達が，立方体の稜の形をした針金枠に張らせた石鹸膜やシャボン玉の形に目を見張り，口々に「すごい!」「きれい!」「不思議!」と言いながら，さまざまな向きから眺めたり，自分で作ってみたりしてくれました.

予想していたよりも作業や実験に時間がかかって講演の最後は駆け足になってしまい，予定していたワークシートによる作業が全部はできなかったことは残念でした．

後日，小野中学校の生徒さん達の感想文が送られてきましたが，シャボン膜の思いがけない形に対する驚き，それを数学で説明したり証明したりできることに対する感動が述べられており，彼らの純真さに私の方も心を打たれました．また，解の存在についての質問が書かれたものがあり，数学の理解の深さに感心しました．

下に，講演用のスライドと生徒さん達に配布したワークシートを掲載させていただきます．なお，著作権の問題等により，講演で使用した画像のうちの一つは消去しています．

最後に，今回の講演・実験・実習を行うに当たり，藤岡市教育委員会の教育長，生涯学習課の方々，藤岡市立小野中学校の校長先生，副校長先生，数学の先生方を始めとし，関係の方々に大変お世話になりました．この場を借りて感謝申し上げます．

第21回おもしろ数学教室

「近道とシャボン膜の数学」

講師：　　　　　　小磯　深幸
（九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所）

藤岡市立小野中学校

2016年10月14日（金）

自己紹介

研究分野：数学の中の幾何学（図形を研究する分野）

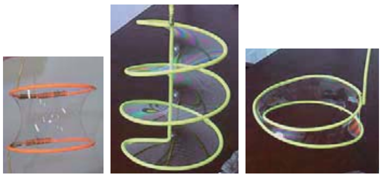
研究課題：変分問題　---「最も効率の良い形」を求める研究

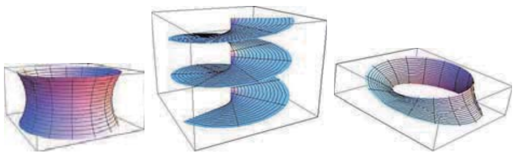
例．石けんまくは表面張力ができるだけ小さい形になる．表面張力は面積に比例するため，面積ができるだけ小さい形になる．シャボン玉は，中に空気を包んだ状態でできるだけ表面積が小さい形になる．

下図：石けんまくと面積最小曲面

左の3つは石けんまくの写真：針金のわくを張る面積最小の曲面．

右の3つは数学で作られた面積最小曲面：左から，けんすい面，常らせん面，メービウスの帯型極小曲面．これらは数学の式で表せる．

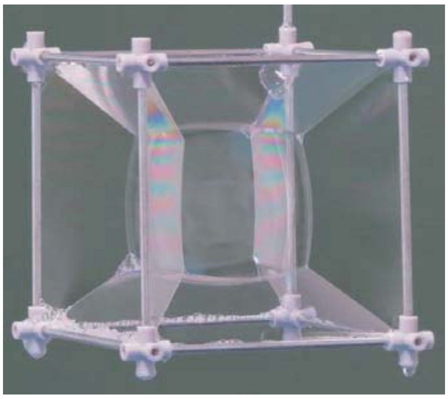


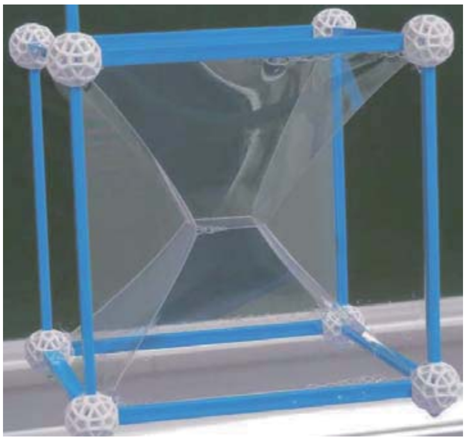


今日のお話

下の写真は，立方体の形をした針金のわくに石けんのまくを張らせたものです．

右は中に正方形が，左は中に球形ではないシャボン玉ができています！





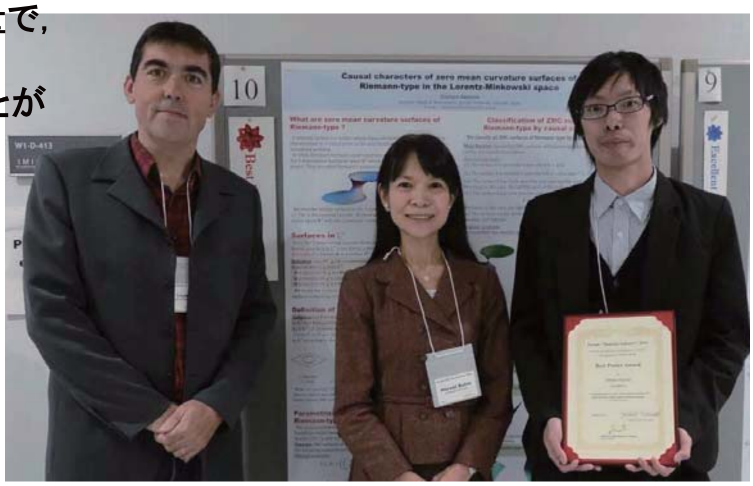
今日は，石けんまくやシャボン玉が面積最小という性質を使って上の現象が起こる理由を説明します．

今日，助手を務める方の紹介(I)

赤嶺新太郎君：九州大学大学院博士課程2年生

ブラックホールの形を数学的に解明することにつながる研究をしている．

ブラックホール：
高密度かつ大質量で，強い重力のために光さえ脱出することができない天体．そのため，直接的な観測を行うことは困難．

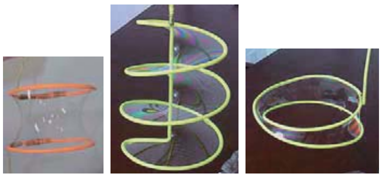


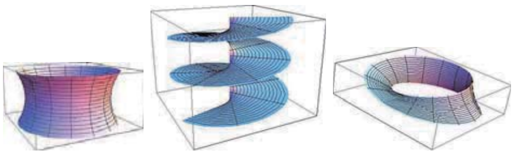
右の写真：昨年11月に研究集会で最優秀ポスター賞を受賞しました．

今日，助手を務める方の紹介(II)

照屋靖志君：九州大学大学院修士課程1年生

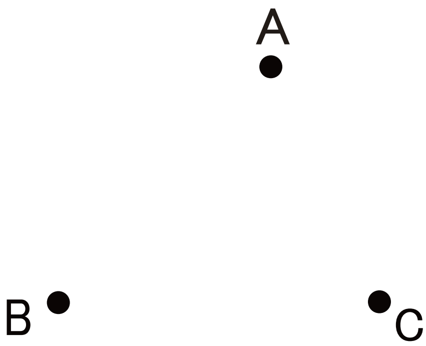
石けんまくがどのような方向を向くかを数学的に解明することにつながる研究をしている.





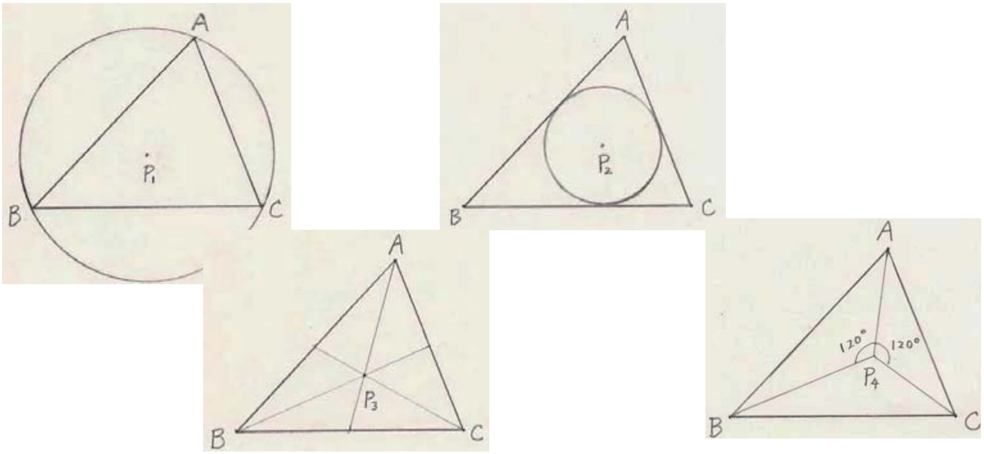
1. 近道を探しましょう

前橋市（点A），藤岡市（点B），太田市（点C）をつなぐ電力ケーブルを設計しましょう．ただし，できるだけ全長が短くなるようにします．

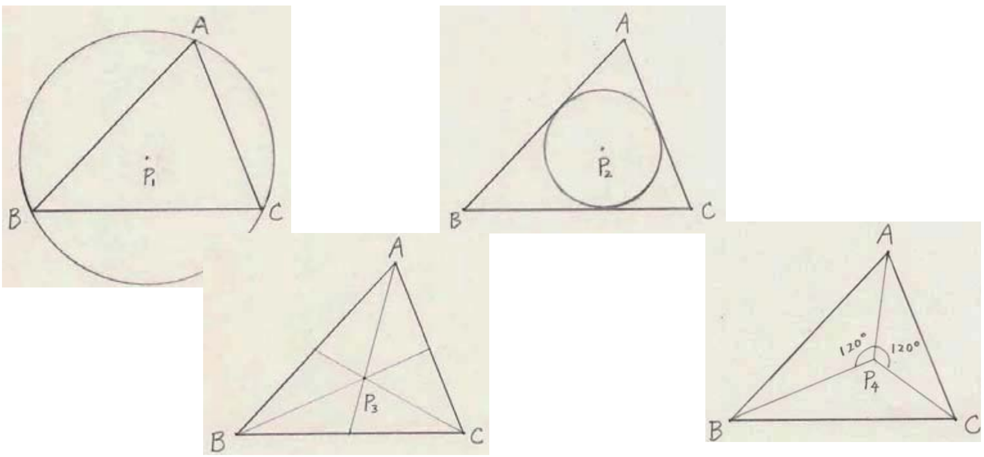


ワークシートの点P_1，P_2，P_3，P_4 は，それぞれ，三角形ABCの外心，内心，重心，Steiner（シュタイナー）点と呼ばれています．

定規で測って，長さ $\ell_1=AP_1+BP_1+CP_1$，$\ell_2=AP_2+BP_2+CP_2$，$\ell_3=AP_3+BP_3+CP_3$，$\ell_4=AP_4+BP_4+CP_4$ を求めましょう．
$\ell=AB+BC+CA$ も求めましょう．一番短いのはどれでしょう？

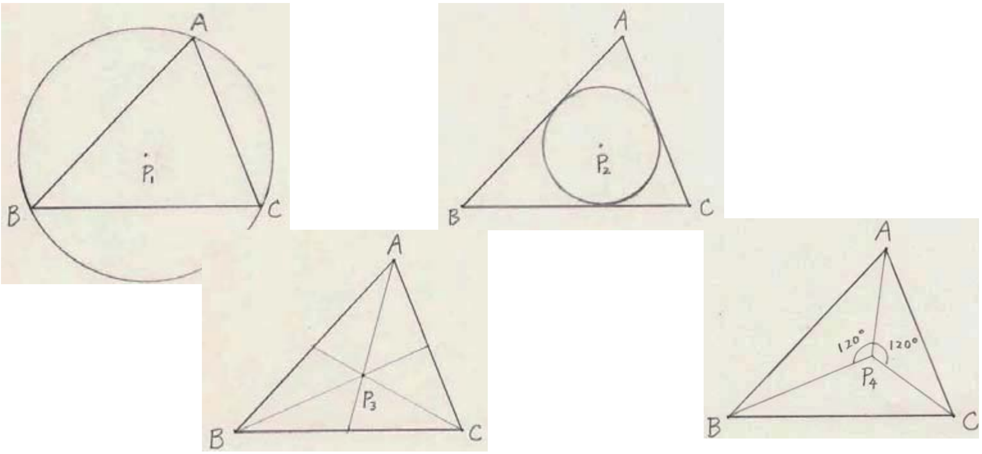


$\ell_1=$？



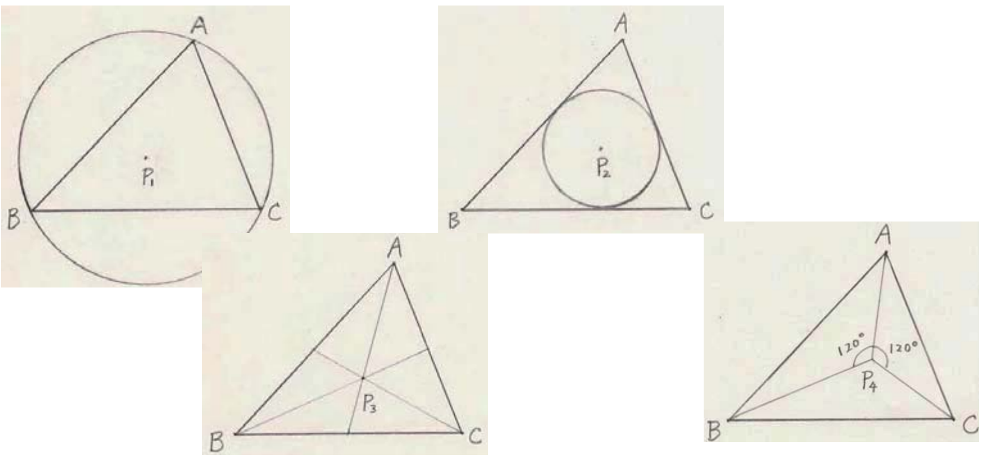
私が測った結果は，ℓ_1=8.85cm

ℓ_2=？



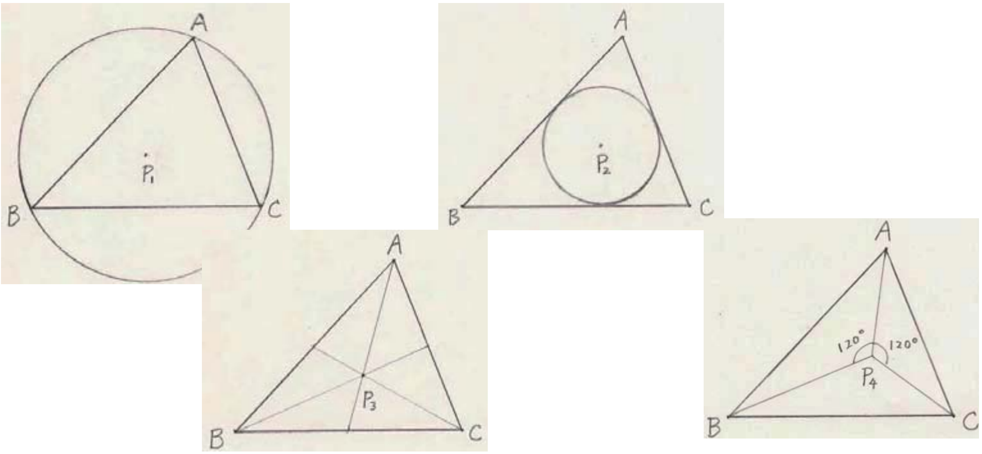
私が測った結果は，ℓ_1=8.85cm，ℓ_2=8.65cm

ℓ_3=？



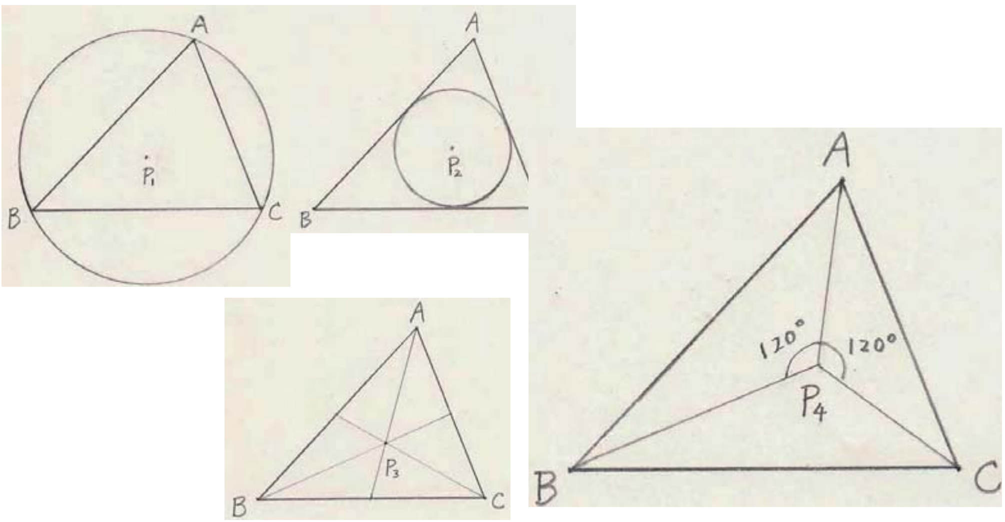
私が測った結果は，ℓ_1=8.85cm，ℓ_2=8.65cm，ℓ_3=8.75cm

ℓ_4=？



私が測った結果は，
ℓ_1=8.85cm，ℓ_2=8.65cm，ℓ_3=8.75cm，ℓ_4=8.55cm, ℓ=15.1cm

ℓ_4 が最も短いですね.

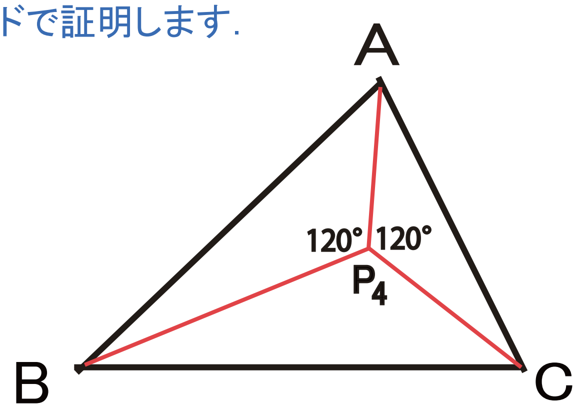


三角形ABCの三つの内角がすべて120度よりも小さい時，
三点A, B, Cを結ぶ最短のネットワークは，シュタイナー点
P_4 とA, B, Cを結んだもの

$$AP_4 + BP_4 + CP_4$$

となります．

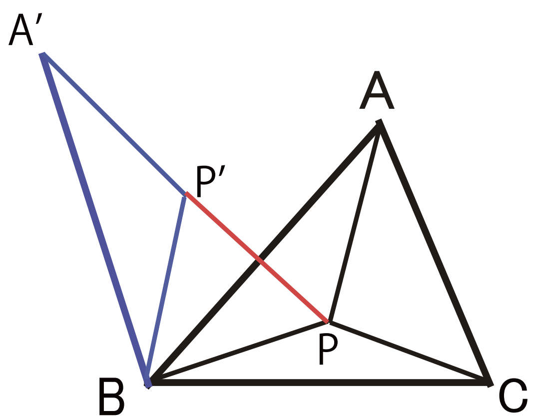
このことを，次のスライドで証明します．



△APB を点B を中心に60°回転させた三角形を△A’P’B とすると，

$$\mathbf{PB = P'B,\ \angle PBP' = 60^\circ}$$

より，△BPP’は正三角形となる．



よって，PB＝P'B＝P'P･･･①　また，PA＝P'A'･･･②
①，②より，PA＋PB＋PC＝A'P'＋P'P＋PC･･･③

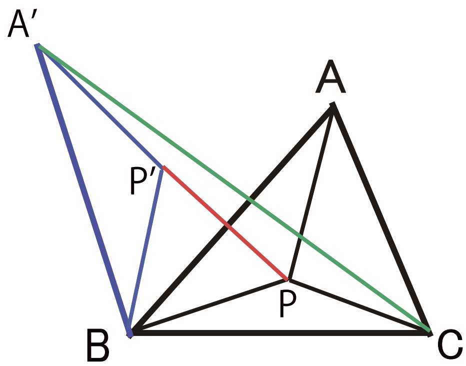
ここで，折れ線A'P'PC の長さが最小となるのは，折れ線が直線A'C になるときである.

ゆえに③より，PA＋PB＋PC が最小となるのは，A'，P'，P，C が同一直線上にあるときであるから，
∠BPC＋∠BPP'＝180°，すなわち，∠BPC＋60°＝180°　のとき.

よって，∠BPC＝120°

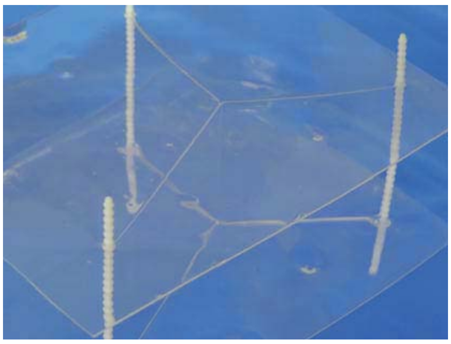
同様にして，
∠APB＝∠BPC＝∠CPA
＝120°

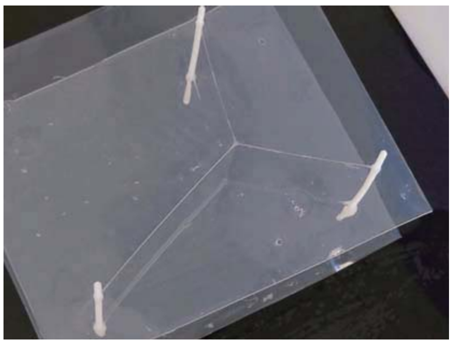
のときである.（証明終）

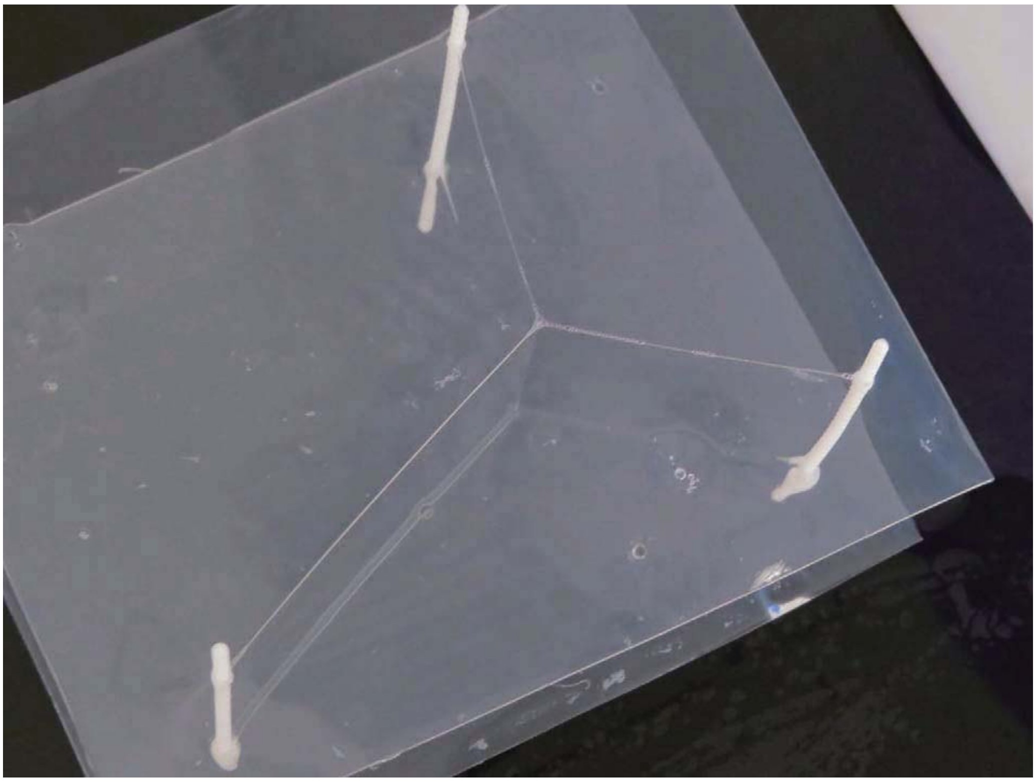


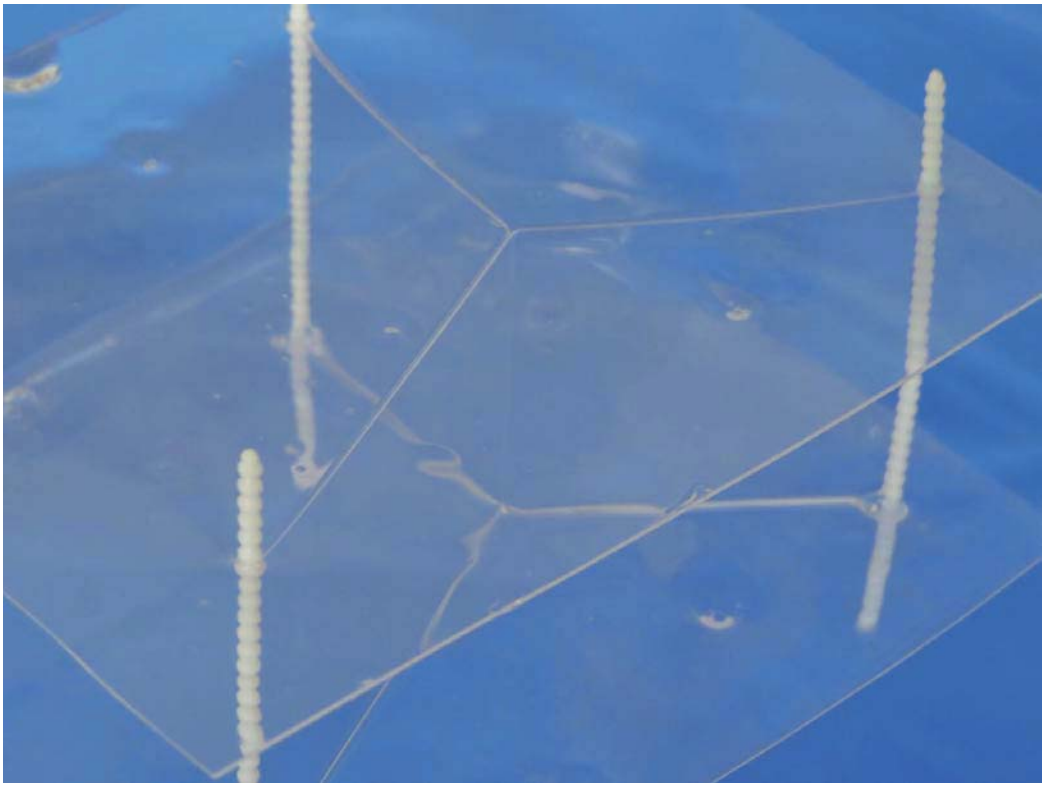
2. 石けんまくは答えを知っている？

上の３点A, B, Cの状況を，プラスチックの板と棒で作る.それを，シャボン玉の液につけてそっと引き上げると，下図のような膜（まく）が張る．シャボン膜は非常に薄いので，膜にかかる力は表面張力だけとみなせる．そのため，表面張力が最小になるように膜が張る．すなわち膜の面積が最小となるようになる．したがって，プラスチックの板を上から見たときの膜の線の長さの和は最小になっている！









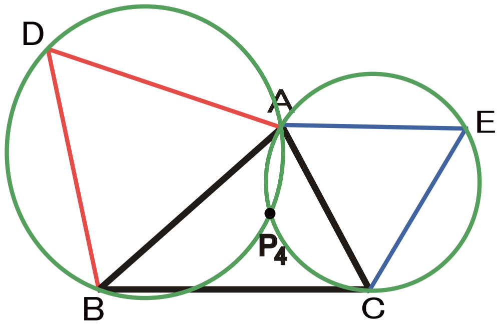
3. シュタイナー点を作図しよう

右下図のように，辺ABを一辺とする正三角形ABDを描きます．

同様に，辺ACを一辺とする正三角形ACEを描きます．

次に，点A, B, Dを通る円を描きます．
そして，点A, C, Eを通る円を描きます．

これら二つの円の交点が，シュタイナー点です！



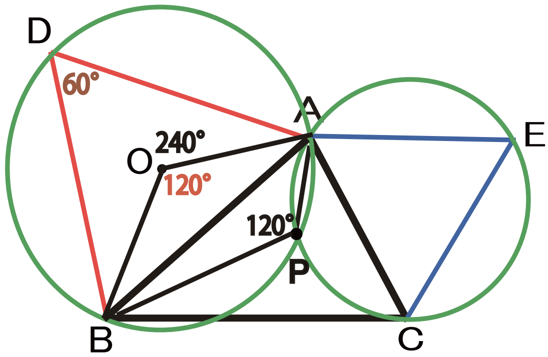
緑色の二つの円の交点 P が，シュタイナー点であることを確かめよう．

∠ADB＝60°　である．対応する中心角∠AOBは円周角∠ADBの2倍だから，∠AOB＝120°　である．

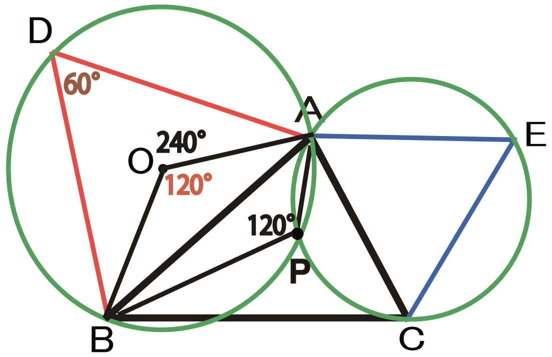
この時，円周角∠APBに対する中心角は 240°　だから，∠APB＝120°　である．

同様にして，
∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120° である．

ゆえに，Pはシュタナー点である．　　　（証明終）

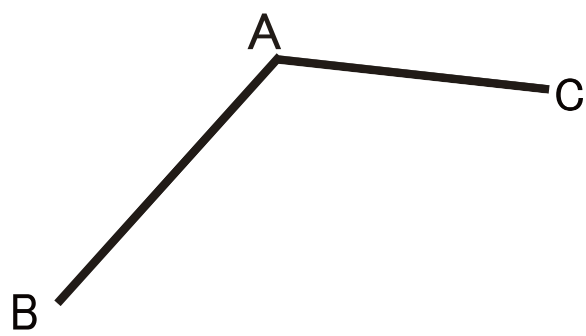


∠CAB が 120° よりも大きいときは，シュタイナー点は決まるでしょうか？
ちょうど ∠CAB = 120° のときはどうでしょうか？



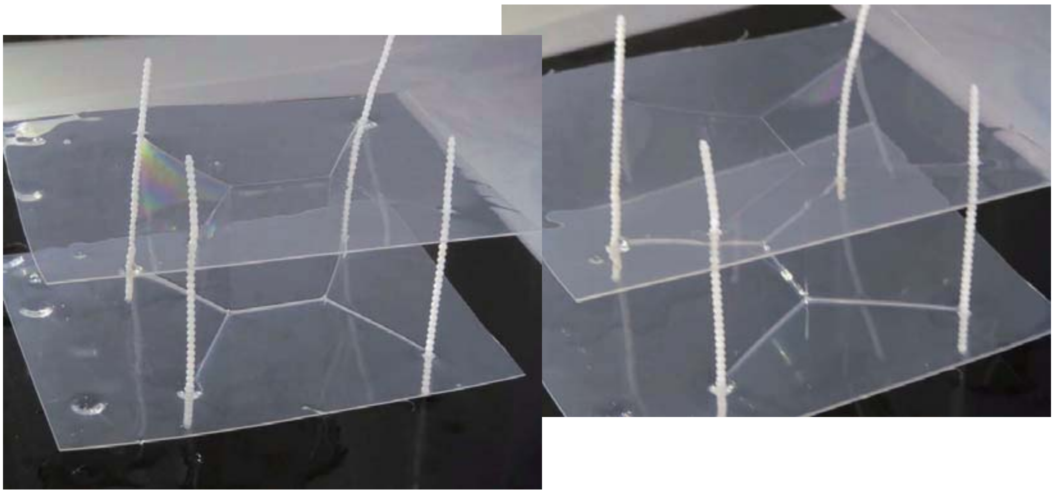
∠CAB が 120° よりも大きいか，または等しいときは，シュタイナー点は求まりません．

A, B, Cを結ぶ最短ネットワークは，折れ線BACとなります．

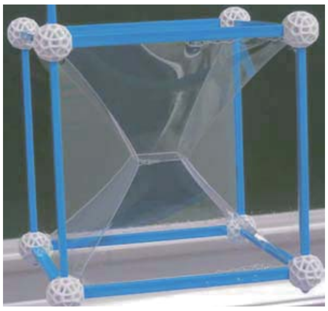


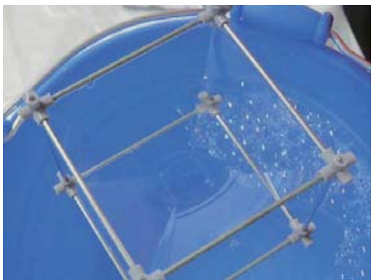
4. 四点をつなぐ最短ネットワークは？

1つ前のスライドのような特別な場合を除き，
互いに120°の角を成す線分達より成ります．

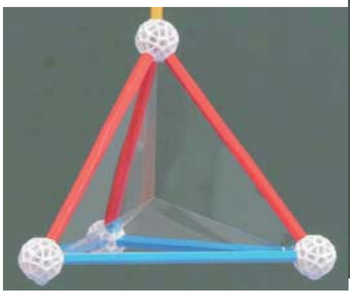


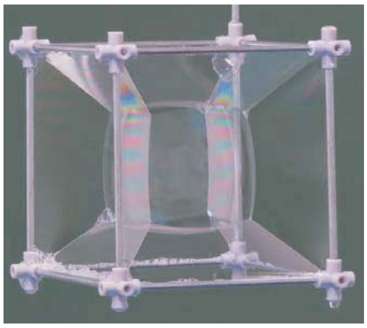
5. 実は，シャボン玉や石けんまくは，
いつも120°でしか交わらない！





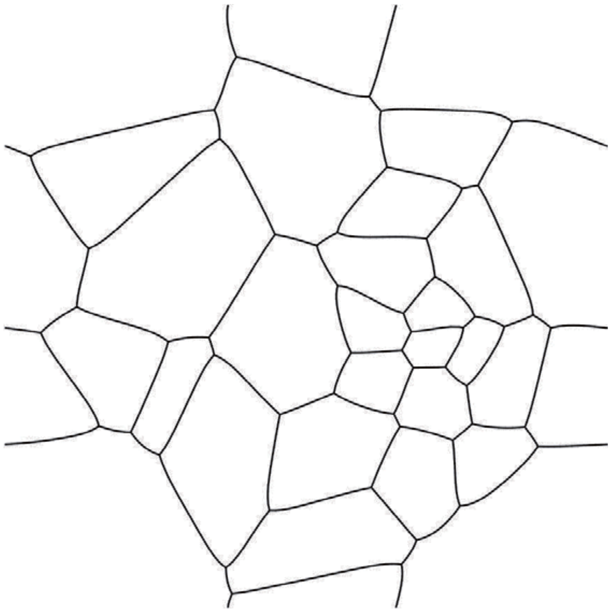
泡も！





6. 最後に，動画をお見せしましょう

曲線たちの
長さの和が
どんどん短く
なっていく動
画です.



7. おわりに

石けんまくの美しい性質や形を楽しんでいた
だけたでしょうか？

数学の理論は一つ作れば，石けんまくの形にもブラックホールの形にも，水滴，赤血球，．．．といろいろなものに応用できます.

食塩の結晶や金属の結晶のようにかどがある物体について数学で調べるのは難しく，研究が発展中です.

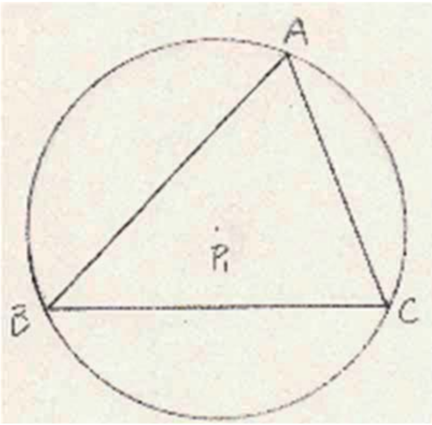
シャボン玉

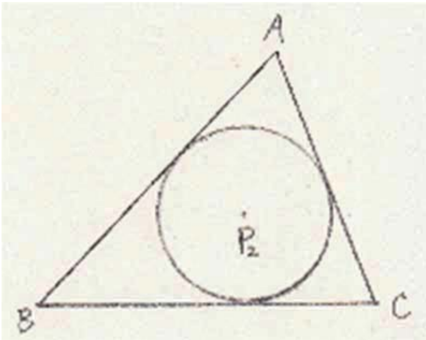
これで私の講義は終了です.
皆さん，ご参加ならびにご清聴有難うございました.

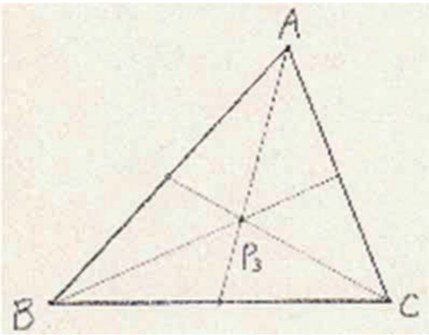
「第 21 回おもしろ数学教室（2016 年 10 月 14 日）」ワークシート

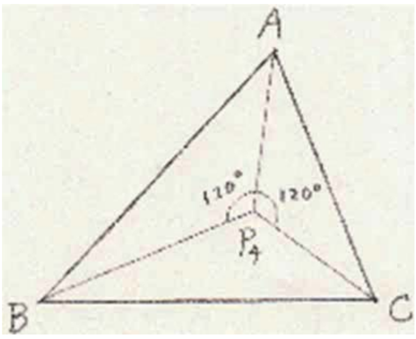
1. 三点 A, B, C をつなぐ最短のネットワークをみつけましょう.

　下の図では，点 P_1，P_2，P_3，P_4 は，それぞれ，三角形 ABC の外心，内心，重心，Steiner（シュタイナー）点と呼ばれています．定規で測って，
長さ $\ell_1=AP_1+BP_1+CP_1$，$\ell_2=AP_2+BP_2+CP_2$，$\ell_3=AP_3+BP_3+CP_3$，$\ell_4=AP_4+BP_4+CP_4$ を求めてみましょう.









$\ell_1=$

$\ell_2=$

$\ell_3=$

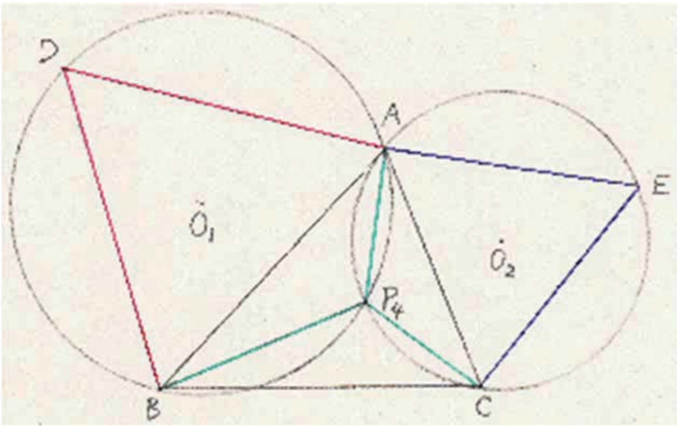
$\ell_4=$

2. 下の図は，Steiner 点の作図の仕方を表しています.

(1) ∠CAB, ∠ABC, ∠BCA を分度器で測りましょう.

∠CAB =　　　　∠ABC =　　　　∠BCA =

(2) ∠CAB が 120 度よりも大きい時は，Steiner 点は求まるでしょうか? ∠CAB が丁度 120 度のときはどうでしょうか? 図を描いて考えましょう.



3. 四点 A, B, C, D をつなぐ最短のネットワークをみつけましょう.