書　評

微分方程式で数学モデルを作ろう

デヴィッド・バージェス，モラグ・ボリー 著，垣田高夫，大町比佐栄 訳
日本評論社，1990 年

北海道大学大学院理学研究院
神保　秀一

この本は書名にあるように, 数学モデルと微分方程式の関わりについて，基礎的な内容をたくさんと, いろいろ, 様々に, 解説しています．まず, 数学モデルという言葉についてですが, 数式を用いて現象を表したものが数学モデルであると解釈すればおそらくほとんど全ての自然科学において数学モデルの考えが適用されていることになります．微分積分学が創始された時代は, 天体や物体の運動の理解を目的とするニュートン力学の発展の時期でもあり, 微分積分学の計算や応用それ自体が数学モデルの考えの実践であったと思っても良いことになります．よって, 多くの理系分野の初学者や学生にとってそれを学ぶことは有用なものと考えられます．本書の対象読者としては大学の理系学生が中心だと思いますが，その他, 優秀な高校生や数学教師やまた数学好きの一般人も視野にいれて企画されているようです．そのため読み物として非常に読みやすいものになっています．本書の数学的な内容は常微分方程式の入門レベルにとどまり, あまり高度な内容を含みません．よくある常微分方程式の入門書で標準に扱われる, 材料が扱われています．それらは, 変数分離型方程式，1 階線形方程式に対する定数変化法，2 階の定数係数線形微分方程式, 2 変数の非線形連立方程式のなす力学系の停留点の標準形の理論などの基礎的な部分に限られます．従って, 大学 1 年生で微分積分学を学んでいる最中の人などは全員が読めます．これらの数学的題材は, 元の自然現象である, 人口の増大 (マルサスの人口の原理), 炭素原子の変異と年代測定モデル (美術品の贋作), 物質の加熱と温度低下の制御問題, ロケットの多段階打ち上げと燃料の制御, 商品の販売と広告の関係, トリチェリーの法則, 惑星の運動とケプラーの法則，電気回路, 生物種の競合, 糖尿病検査, 化学反応, 軍備競争, などの現象にからめてがモデル方程式の導出とともに解説されます．これらのすべては上記の微分方程式の基本計算や理論でもって説明されます．私自身も微分方程式の入門書の執筆を経験しておりますが, こんなにネタがいっぱいあったのだなと驚いております．どれについても詳しく問題の起源や背景が述べられています．結果帰着される方程式は大体同じようなものになりますのですべてを大まじめに読んでいるとちょっと飽きてくる面もあります．よって途中からはつまみ食い的に読んでもよいでしょう．優秀な数学の学生あたりがゼミでやったとしたら “もう勘弁して欲しい” と言うかもしれません．しかし教育効果は大いにあるでしょう．以下で, 個人的に印象に残った題材について紹介したいと思います.

1. 殺害時刻の推定 (2 章演習問題) 殺人事件の被害者の死体が, ある夜 11 時に発見された. 警察医が呼ばれて午後 11 時 30 分に到着し, 直ちに体温を計ったところ華氏 94.6 度であった. 1 時間後にもう一度計ってみたら 93.4 度で室温は華氏 70 度で一定であると書き留めていた. 冷却の法則を用いて死亡時刻を推定せよ (冷却の法則とは外気との温度差に比例して熱を失うということ. 熱伝導のフーリエの法則にほぼ近い). ちなみに華氏と摂氏の温度の変換式は [華氏 (° F)] = 32 + (9/5) [摂氏 (° C)] です.

(私の解答) 時刻 t の体温を $T(t)$ とすると冷却の法則により

$$\frac{dT}{dt} = -\mu\,(T-70)$$

となると思う. ここにある定数 $\mu > 0$ は熱の冷却の法則による物理定数です. これが既知なのか未知なのか迷いますが警察医には既知であって欲しいですね. でもいちおう未知とみなして方程式を解くと

$$T(t) - 70 = (T(t_0) - 70)\exp(-\mu(t - t_0))$$

となる. これは我々が一番最初に学ぶ微分方程式の解の公式であるが. 本文中では t_0 は殺害時刻としてみる. ただし 11 時 30 分を時刻の起点としてゼロにした. これらの条件および初期体温は人間の平均体温 36.5° C=97.7° F を用いることで時刻 t_0 は約 9 時 23 分となる. 但し途中電卓で計算した.

コメント： この問題の解法は物体の温度現象ならどんな場合でも適用できるので, 死体を持ち出す必要は全然ないですが警察の鑑識で実際に利用されているならリアリティーを醸し出す効果があって良いと思います. 実際私が 4 年ゼミ (偏微分方程式入門) で指導した学生が警察に就職したことがあるのでひょっとしたらゼミでやった数学の知識が仕事で役立っていると期待しています.

2. ロケットの打ち上げについて (第 3 章)

まず一般的にロケット X が無重力の世界を直線的に飛行する運動を記述する. ロケットは 燃料を燃焼して噴射することで加速することができる. ロケットからの噴射速度を $c > 0$, ロケット本体の質量を P (一定) とする. 時刻 t における, 燃料の質量を $m = m(t)$, ロケットの速度を $v = v(t)$ とおく. 時刻 t, $t + (\delta t)$ における運動量がこの期間で一定であるとする (運動量保存) から

$$\{P + m(t + (\delta t))\}v(t + (\delta t)) + (m(t) - m(t + (\delta t)))(v(t + (\delta t)) - c)$$

$$= \{P + m(t)\}v(t)$$

である. これを式変形して両辺を $\delta t > 0$ で割ってみると

$$\frac{\{P + m(t + (\delta t))\}v(t + (\delta t)) - \{P + m(t)\}v(t)}{\delta t}$$

$$= \frac{(m(t+(\delta t)) - m(t))(v(t+(\delta t)) - c)}{\delta t}$$

を得る．ここで $\delta t \to 0$ として方程式

$$\frac{dm(t)}{dt} v(t) + \{P + m(t)\} \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} (v(t) - c)$$

を得る．

ここで未知関数が $m(t), v(t)$ と２つあるが方程式が１つだけなので, 方程式の解を時刻の関数として求めることには情報がたりない．しかし dm/dt で両辺を割って

$$v(t) + \{P + m(t)\} \left(\frac{dv(t)}{dt} / \frac{dm(t)}{dt} \right) = v(t) - c$$

さて, 物理的意味を考えると $dm/dt < 0$ となり, v を m の関数と考えると

$$\frac{dv(t)}{dt} / \frac{dm(t)}{dt} = dv/dm$$

と解釈できるから $v = v(m)$ の方程式として

$$dv/dm = -c/\{P + m\}$$

を得るので, これを積分して

$$v(m) = -c \log(P + m) + d \quad (d \text{ は定数})$$

を得る．初速度を v_0, 初燃料を m_0 として定数 d を決めると

$$v - v_0 = c \log \left(\frac{P + m_0}{P + m} \right)$$

を得る．よって, これによって使用燃料に対する速度の増加を与える関数が得られた．

多段階式ロケットと制御：人工衛星等のためのロケットの打ち上げにおいて使用済みの燃料タンクはつけといても意味がないので切り離すことが行われている．その場合の段階の分け方によって違いがでるので, それを見てみる．ロケットは３段式として３つの部分に分かれているとする．

上部：ロケットの主要部 (人工衛星, 噴射装置, 多少の燃料, 計器等) (質量 P)

中部 (２段目ロケット)：燃料 (質量 ϵm_2), タンク + 噴射装置の機器（質量 $(1-\epsilon)m_2$)

下部 (１段目ロケット)：燃料 (質量 ϵm_1), タンク + 噴射装置の機器 （質量 $(1-\epsilon)m_1$)

ここで ϵ は正定数で $0 < \epsilon < 1$ である．初速度 v_0, １段目切り離し直後の速度 v_1, ２段目切り離し直後の速度 v_2 として $v_1 - v_0$, $v_2 - v_1$ は前段での考察により次のように与えられる．

$$v_1 - v_0 = c \log \left(\frac{P + m_1 + m_2}{P + m_2 + (1-\epsilon)m_1} \right)$$

$$v_2 - v_1 = c \log\left(\frac{P + m_2}{P + (1-\epsilon)m_2}\right)$$

以上よりロケットの総獲得速度 $V = v_2 - v_0$ を m_1, m_2 によって表現できた. すなわち

$$V(m_1, m_2) = c \log\left(\frac{P + m_1 + m_2}{P + m_2 + (1-\epsilon)m_1}\right) + c \log\left(\frac{P + m_2}{P + (1-\epsilon)m_2}\right)$$

となる. 実際の問題はコストの制約があり $m_1 + m_2$ を一定値 M にして V を最大にする計画を考えることが問題となる. すでに V が微分積分の式で記述されているので最小値問題を解いて

$$m_1 = \frac{M\sqrt{1 + (M/P)}}{1 + \sqrt{1 + (M/P)}}, \quad m_2 = \frac{M}{1 + \sqrt{1 + (M/P)}}$$

が最適な燃料配分ということになる. 実際には $P : m_2 : m_1 = 1 : 50 : 500$ 位で実現されているそうです.

コメント: ここでは重力等の外力のない場合を考察しているので現実からはずれていることに注意したい. 第一宇宙速度 (地球脱出速度) は 8km 程度ということと, これ以上に加速する必要があることと予算が限られているということでこの分野のコスト計算やデザイン最適化はシビアな問題のようです. 土星探査ではロケットをいったん地球より内惑星の方向に打ち出し金星の重力によって加速してから土星方向にロケットを行かせるそうです. これにより効率化が計られているようです (この Gravity Assist ついては北大院生のアルベール君から情報を得ました).

まとめと感想: 数学的に単純で初等的な方程式でも結構膨大な現象の実例となっていることに考えを新たにしてくれます. 微積分等の教育のなかで使えるネタとしていろいろ知ることができて参考になりました. 微分方程式の数学研究者は, 方程式は与えられたもので, あまり改変していけないものだと勝手に思い込んでいるのではないかと反省しました. 本書では割と自由にモデル方程式を作り替えて試している様がみられ, 自然科学の思考や想像の自由性のようなものが味わえます. これによって数学のもつ効力や意義や科学技術社会での有用性などについて意識を広めたいという著者の考えがわかり, 好感をもたせてくれます.