

# 女子中高生夏の学校 2017 実験・実習「組みひもの数学で遊んで占おう」

奈良女子大学理系女性教育開発共同機構  
船越 紫

## 女子中高生夏の学校 2017 ～科学・技術・人との出会い～

独立行政法人国立女性教育会館が主催のこのプログラムは、独立行政法人科学技術振興機構「平成 29 年度女子中高生の理系進路選択支援プログラム」の委託を受け、2017 年 8 月 5 日～7 日に 2 泊 3 日の合宿研修として開催されました。女子中高生夏の学校（以下、夏学）は平成 17 年からスタートし、13 回目となる今年は女子中高生 103 名、保護者・教員 19 名の参加となりました。協賛団体の一つである日本数学会からの出展としては、2 日目の実験・実習と、ポスター展示がありました。今回私は実験・実習「組みひもの数学で遊んで占おう」の講師を担当させていただきました。以下では実験・実習、ポスター展示の様子をご報告いたします。

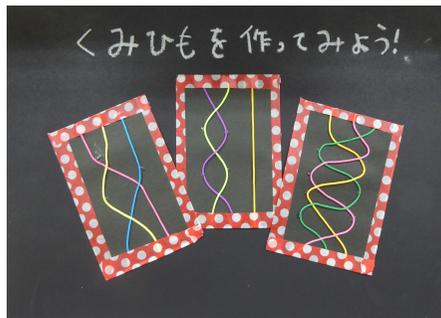
## 実験・実習「組みひもの数学で遊んで占おう」に関するご報告

群馬高専の清水理佳先生と東京工業大学の久野恵理香さんとともに担当した実験・実習「組みひもの数学で遊んで占おう」に参加して下さったのは、女子中高生 7 名、保護者・教員 3 名の計 10 名でした。中高生からは「数学が好き」だからこのテーマを選んだという声がたくさん聞こえてきました。

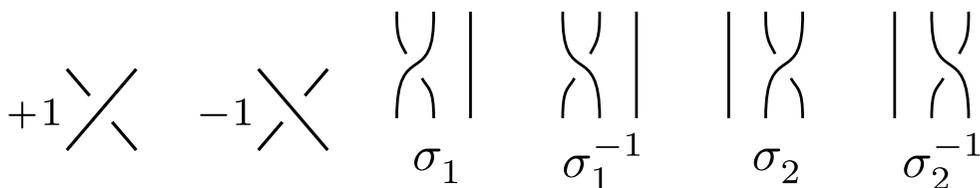


## 組みひも

組みひもとは、右の写真のように端点を固定した何本かの垂れたひもを編んだものの事です。様々な編み方が存在しますが、言葉ではなく文字列を用いる事でこれらを区別して表現する事ができます。ひもがどのように編まれているかがわかりやすくなるように、必要があればひもを少し動かすことで、ひもの交点が必要であればひもを少し動かすことで、ひもの交点が必要横断的になるようにしておきます。



実験・実習では、まずは自由にひもを編み、好きな編み方の組みひもを作ってもらいました。そしてこの組みひもを数学的対象として扱いやすくするために、ひもの上下の関係がわかるよう（上下が入れ替わらないように気をつけながら、）紙の上に図として描きます。この図のことも組みひもと呼びます。左から1, 2本目のひもが交差を作っている事を $\sigma_1$ とあらわし、左から2, 3本目のひもが交差を作っている事を $\sigma_2$ と表すことにします。さらにひもの上下の関係は、右上から垂れているひもが上を通るか下を通るかの2種類だけなので、 $+1$ と $-1$ を $\sigma$ の指数として付けることで区別する事ができます。



組みひもを上から読んだ通りに記号 $\sigma$ を並べる事で、組みひもを文字列で表した事になります。実はこの文字列から、元の組みひもがどのような編み方だったのかを（ひもを見ずに）再現する事ができます！言葉でどんな風に編まれているかを人に伝えるのは非常に困難ですが、数学記号を用いる事でこんなにも簡単に「編み方」を表現する事ができるのです。これには中高生たちからだけではなく、参加していただいた保護者・教員の方々からも驚きの声が上がりました。



## 群

集合  $G$  とその集合上の二項演算  $*$  に対して、 $G$  のどの2つの元  $a, b$  に対しても、 $a * b$  もまた  $G$  の元となり、以下の条件 (1)~(3) を満たすとき、そのペア  $(G, *)$  を群といいます。

### (1) 「結合法則」

どのような  $G$  の元  $a, b, c$  に対しても、 $a * (b * c) = (a * b) * c$  が成り立つ。

### (2) 「単位元の存在」

どのような  $G$  の元  $a$  に対しても、 $a * e = e * a = a$  となるような  $G$  の元  $e$  が存在する。

### (3) 「逆元の存在」

それぞれの  $G$  の元  $a$  に対して、 $a * b = b * a = e$  となるような  $G$  の元  $b$  が存在する。

群は大学の数学の授業で新しく習う概念です。参加者には中学生もいたので、なるべく具体的な例を多めに説明・紹介をしました。実は初めて習う概念で、難しくてみんな困ってしまうかな？ と思っていたのですが、みなさん興味津々で本当に驚きました。



## 2. 群とは?

$G$ : 集合,  $*$ : 演算

$G$  のどの2つの元  $a, b$  に対しても、 $a * b$  も  $G$  の元となり、次の (1)~(3) の性質を満たすとき  $(G, *)$  を群という。

### (1) 結合法則

どのような  $G$  の元  $a, b, c$  に対しても  
 $a * (b * c) = (a * b) * c$   
が成り立つ。

### (2) 単位元の存在

どのような  $G$  の元  $a$  に対しても  
 $a * e = a, e * a = a$   
となるような  $G$  の元  $e$  が存在する。

### (3) 逆元の存在

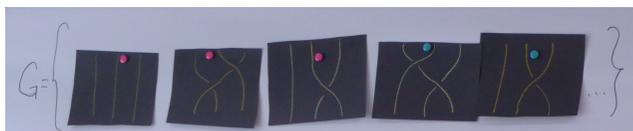
それぞれの  $G$  の元  $a$  に対して  
 $a * b = e, b * a = e$   
となるような  $G$  の元  $b$  が存在する。



## 組みひもと群

この「群」は数学において非常に重要な概念なのですが、先ほど紹介した組みひもと、実は深い関わりがあるのです。先ほどは「集合  $G$ 」という風にすごく抽象的な言い方をしましたが、今度は具体的な集合を考えてみましょう。

$G$  を、「3本のひもで作られた組みひもを全て集めた集合」としましょう。そして2つの組みひもを上下に重ねてひもを繋げる、という操作をこの集合における演算とします。するとこのとき、群の条件 (1)~(3) を満たしている事が確認できるのです。実際、以下の様に3つの条件について確認する事ができます。

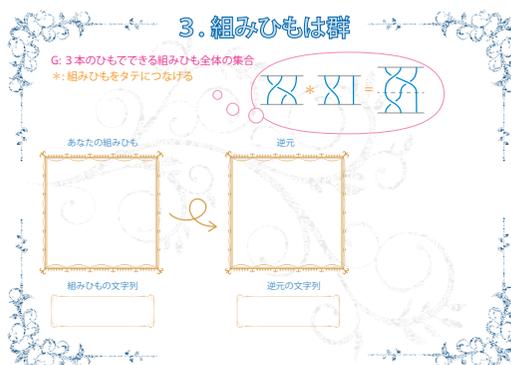


- (1) 重ねた3つの組みひもは上の2つ・下の2つのどちらからひもを繋げても同じものができる。

- (2) 3本のひもがただまっすぐ下に垂れているだけの絡まっていない組みひもが単位元となる。
- (3) ある組みひもに対して、重ねてひもを繋げると全部解けてしまうような組みひも (逆元) が存在する。

(ある組みひもを文字列で表したとき、その文字列を逆から読んで、さらにすべての交差の上下 (+1 or -1) を逆にしたものが、逆元となる。)

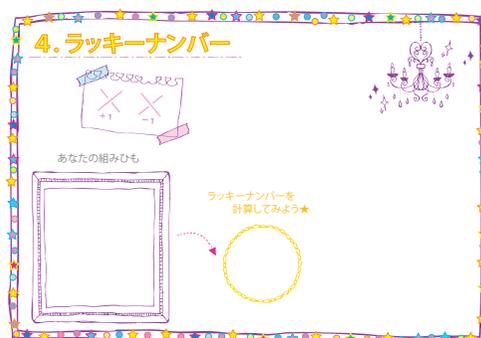
「組みひも」は日常的に見かける機会が多く、ヘアアレンジやアクセサリ、装飾として用いられているように、とても身近なものです。しかし見方を変え表現方法を整理することで背景に隠れている性質・本質があらわれ、数学と結びつく、非常におもしろい題材であると思います。



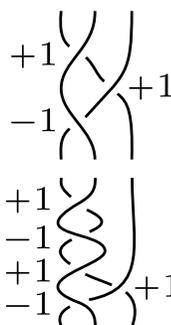
### ラッキーナンバー

最後は楽しい占いをしましょう！ という清水先生の声とともに出てきたのは、「ラッキーナンバー」という新しい言葉でした。実はこのラッキーナンバーは「ねじれ数」や「ひねり数」とも呼ばれるもので、れっきとした数学の言葉です。

最ある組みひもに対して、すべてのひもの交差の符号 (+1 or -1) を書き出し、それらをすべて足し合わせたものを「ラッキーナンバー」といいます。



例えば右のような組みひもの場合、3つの交差の符号はそれぞれ +1, +1, -1 です。これら3つをすべて足し合わせると、 $(+1) + (+1) + (-1) = +1$  となります。右図の組みひもを選んだ場合、ラッキーナンバーは +1 ということになります。また右下の図の組みひもで計算しても、ラッキーナンバーは同様に +1 になることがわかります。実は右の2つの組みひもは同じ組みひもなのです。つまりこの2つの組みひもは、片方の組みひものひもを手で動かすことによって、もう片方の組みひもと同じ形にまで変形できるという関係になっているのです。このような変形で交点をいくら増やしてみても、もとの組みひもと同じラッキーナンバーしか出てこないのです。



参加者のみなさんは実験・実習最初に自分でつくった組みひもを用いてラッキーナンバーを計算していたようです。ラッキーナンバー「-8」という方がいて少し教室がざわつきましたが、是非次は逆元を用いてラッキーナンバーを計算していただきたいですね。

## ポスター展示

午後からのポスター展示のテーマは「暗号と数学」で、愛知工業大学の大島和幸先生と、秀明大学の大山口菜都美先生が担当してくださいました。前日の夜は、大島先生が作成して下さったポスターにみんなで飾り付けをして仕上げた、手作りの素敵なポスターでした。

難しい部分には寸劇も加えながらとても丁寧な説明がなされていました。数学という分野の性質上、実験や実演という形をとることがなかなか難しいのですが、数学を考えながらどのようにイメージを描けば良いのかという部分をしっかりと形にしていたように感じました。



## 謝辞

今回群馬高専の清水理佳先生からお声をかけていただき、夏学の実験・実習の講師を清水先生とともに担当する機会に恵まれ、たくさんの貴重な経験をすることができました。また実験・実習においてTAを務めてくださった東京工業大学の久野恵理香さん、ポスター展示「暗号と数学」を担当していただいた愛知工業大学の大島和幸先生と秀明大学の大山口菜都美先生、夏学企画委員としてお世話になりました東京大学の柏原賢二先生、数式処理学会からご参加頂き、相談コーナーでもお世話になりました防衛大学の藤村雅代先生、筑波大学の照井章先生、皆様方と一緒に活動を行うことが出来、有意義な3日間を過ごせましたことを感謝致します。ありがとうございました。また独立行政法人国立女性教育会館のスタッフの皆様をはじめ、関わったすべての方へ御礼を申し上げます。