

# 折り畳み式製品の数理工学 —折り紙から厚板ボックスへ—

明治大学先端数理科学インスティテュート

奈良 知恵

## 1. はじめに

傘で代表される折り畳み式製品は、携帯や収納の観点から利便性に優れているので需要が高く、他にも、折り畳み式椅子やテーブル、扇子、レインコート、ベビーカー、譜面台、エアバッグ、リュックサックなど多種多様な生活用品があります。ちなみに、折り畳みに関する本“Collapsibles” [1]では、望遠鏡、梯子、さらに浮世絵に描かれた巻紙なども挙げています。しかしながら、コンパクトかつ軽量の「折り畳み式」であって欲しいと思う日常品はまだまだ多数存在します。

ここでは、日本の伝統的な「折り紙」から国際語としての「オリガミ」へとコンセプトが変化している現状を述べた後、最近の十年間に急速に進歩した「多面体の連続的折り畳み」に関する数理工学的研究を用いて、それがどのように産業へ応用されるか、NHK総合番組「超絶凄ワザ！最強の帽子対決」のために開発され、改良版が市販化された「折り畳み式ヘルメット」や厚板ボックスを例に取り上げながら、今後の課題と展望に迫りたいと思います。

## 2. 折り紙と国際語のオリガミ

「折鶴」で代表される日本の伝統的な折り紙は、一枚の正方形の紙から折り目を付けて折り畳む操作を繰り返して、最後に立体に広げて出来上がります。このように、「一枚の正方形の紙からハサミや糊を用いずに」複雑な立体形状を作ることが特徴です。それらの中には、神業と思えるような素晴らしい芸術作品が多数あり、前川淳氏の「悪魔」[2]、布施知子氏の「無限折り」、ロバート・ラング氏の「昆虫シリーズ」[3]、川崎敏和氏の「バラ」などはその一例です。また、一枚とは限らずに何枚かを組み合わせてできる「ユニット折紙」は、星形多面体などへと折り紙の可能性を大きく広げてきました。

その一方で、国際語としてのオリガミ (origami) はコンセプトが大分変化して、「折る」という操作によって種々の形状や性質の変化が可能になる仕組みやものなどへと、広い意味で用いられているようです。例えば、アメリカの研究資金として国立科学財団

(NSF) は 2012 年に “Origami Design for Integration of Self-assembling Systems for Engineering Innovation (ODISSEI)” に補助金を投じています。これには 8 件のプロジェクトが含まれ、2 年～5 年程度の研究期間で各々に現在の為替レートで 2 億円余りの予算が組まれています。その結果とも思われるものがインターネットのサイト



図1. Shapeshifting-paper-puzzle-harvard の切頂八面体によるユニットモデル



図2. ひし形十二面体によるユニットモデル

<http://www.boredpanda.com/shapeshifting-paper-puzzle-harvard/> に見る事ができます。このサイトで公開されている動画は、空間充填立体である切頂八面体に、折り紙を利用したスナポロジー・オリガミ (Snapology Origami) を結合させたもので、非常に興味深い動きをするモデルです。早速、筆者もそのユニットモデル (図1) を作って、「平坦化」や「角柱化」などの動きを試し、さらに、ひし形十二面体で動く独自の例 (図2) も作って遊んでみた次第です。

前述のサイトに関連して、2編の論文が科学論文誌ネイチャーに掲載されていることを館知宏氏に教えていただきました。その中の一編[4]の題名に「オリガミ (origami)」の単語が入っています。

また、アメリカ機械学会の国際カンファレンスである「国際デザイン工学テクニカルカンファレンス (IDETC)」の中に「オリガミに基づく工学デザイン (Origami-based engineering design)」という部門があり、2013年から始まったと聞いています。ここでは、折り紙の影響による応用なども含み、実に多岐に渡り、学際語としての「オリガミ」を感じます。ちなみに、2017年度の講演題名に「origami」という単語を含む合成語を拾い出してみると13個 (*Origami-based Engineering*, *Origami-based Corruptions*, *Origami-based Mechanisms*, *Origami Architecture*, *Origami Channels*, *Origami-inspired*, *Origami Mechanism*, *Origami Structures*, *Rigid-foldable Origami*, *Origami Patterns*, *Four-fold Origami*, *Origami Metamaterials*, *Origami Folding*, *Origami Reverse-fold*) もありました。こんなところにもオリガミに対する意気込みと期待がうかがえます。

### 3. 折り紙の数理に関する論文

近年、図書館収蔵の文献のデジタル化が進み、誰でもが簡単にアクセスできるようになり、そのお蔭で、折り紙の数理に関する論文として、たぶん、最初のものであろうと思われる村田三良氏の論文[5]を筆者も入手することができました。そこには、平坦折りできるための折り目の構造に関する3つの必要条件が書かれています。すなわち、折り目の交差する各点について、「分岐する折り目の本数は偶数であること」「山折と谷折の本数の差は2であること」「中心角を一つ置きにとった和は $180^\circ$ であること」です(図3)。

上述の条件は各点の必要条件であり、一般に折り目のデザインが与えられたとき、平坦折りが可能か否かを判定するためには、一点の周りだけでなく、交差する全体との調和も必要で、とても難しい問題になり、コンピュータによる判定や計算手順の複雑度などの研究が盛んに行われています。ここでは、この程度にして、産業への応用に焦点を絞りたいと思います。

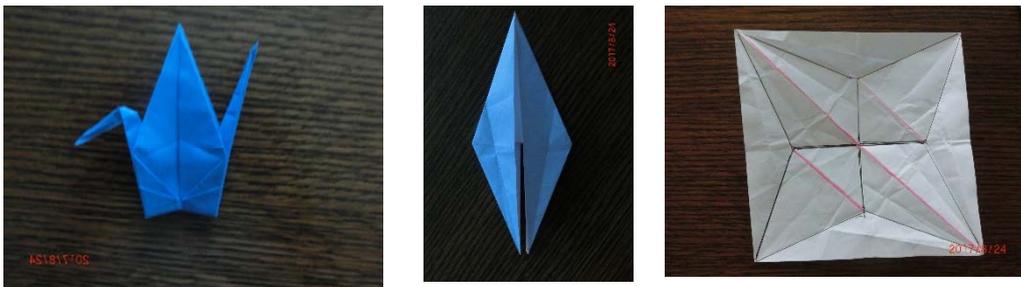


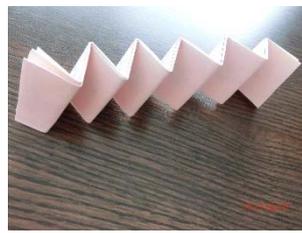
図3. 折り鶴の途中段階の折り目の山折と谷折

### 4. 折り紙構造の応用

実際に製品として利用されている折り紙構造と言えば、「ミウラ折り」(図4)を挙げる人が多いようです。一枚の長方形の紙を小さく折り畳んで、二か所を引っ張れば元の長方形になるからとても便利です。宇宙衛星のソーラーパネル(イカロスに使われたソーラーセイルは異なるデザインですが)や地図などに活用されているのも納得できます。とは言え、私たちの身の回りの生活用品に見られるまでには至っていません。その理由は何だろうかと考えながら、ミウラ折りを実際に折ってみると、山谷を無視した折り目は、最初に蛇腹折り(図5(1))して細長くし、続いて、少し角度を付けて蛇腹折り(図5(2))すれば得られます。ただし、このままでは、二か所を引っ張っても元の長方形にはならず、そのためには、もう一度、元の長方形に戻してから、折りの手順を逆にして、先に角度を付けたジグザグに沿って蛇腹折りをすると、ミウラ折り(図5(3))が完成します。



(1)



(2)



(3)

図4. ミウラ折り  
M. Ruiz 氏作品

図5. (1) (2) ミウラ折りの山谷を無視した折り目  
(3) 逆手順による山谷の折り目

ところで、大量生産に必要なロボットの能力はどの程度進んでいるでしょうか。日常品として身近で使用可能なものは、平行線の蛇腹折りさえもままなりません。ミウラ折りのようなジグザグ折りができる安価なものはまだ発明されておらず、そのあたりがミウラ折りの応用への壁となっているのかも知れません。

## 5. 名刺に見る数理

前述した 2017 年度の国際カンファレンス (IDETC) はオハイオ州クリーブランドで開催され、その折りに私を含む四人で名刺交換をすることとなりました。ドイツのシュトットガルドから来られた Y. Klett 氏は自分の名刺を取り出すと、その場でミウラ折りにしてから私に手渡されたので驚きました (図6)。特殊な紙に折り筋を入れてあるとの事ですが、こんなところにもミウラ折りへの期待がうかがえます。また、マサチューセッツ工科大学から来られた J. Ku 氏は、四枚の名刺を使って、その場でユニット折紙の星形多面体を作って私にプレゼントしてくれました (図7)。どうしてこんなことが可能なのかと考えてみたら、彼らの名刺の縦横のサイズの割合が  $1:\sqrt{3}$  と正三角形を作るのにとっても都合よくできています。対角の頂点を重ねて折り目を付けると、二枚が重なる部分が丁度正三角形になり、また、四辺の中点を結ぶダイヤモンドは丁度正三角形二個分です (図8)。このよう

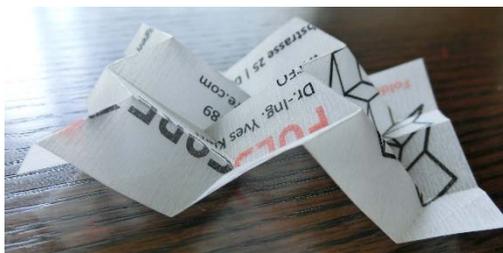


図6. Y. Klett 氏の名刺とミウラ折



図7. J. Ku 氏の名刺とユニット折り紙

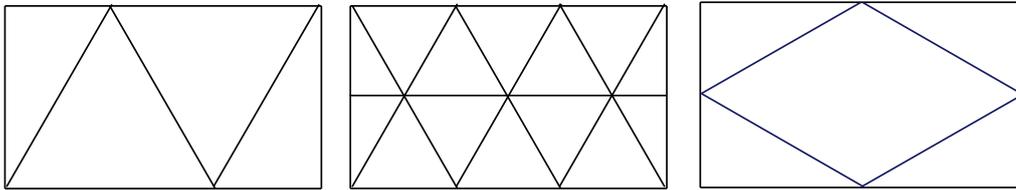


図8. 名刺と正三角形の折り目

な性質を上手く使っていることが分かります。

ところで、何の芸もない名刺しか持っていなかった私は「折り紙は日本の伝統文化」と主張するには程遠い存在であることを思い知り、帰国の飛行機の中で、日本の名刺で何か面白いものは作れないものかと考えた次第です。日本の名刺は縦横の長さの比は黄金比に近いので、まず、「黄金螺旋」の近似形(図9)が可能です。予めこの線を印刷しておいて、「オウムガイやカタツムリの殻に見られる形」と述べてから、螺旋の収束点に楊枝を立てて回せば、左右の回し方による相違を視覚的に見せられるので、少しは数学らしくなるでしょうか。

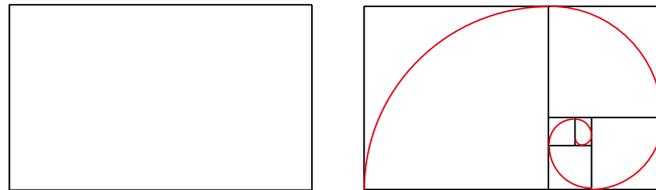


図9. 日本の名刺と黄金螺旋

しかし、立体の方がずっとインパクトはあります。そこで思い出したのが、中村義作氏の考えられた「三枚の名刺からサッカーボールへ」です([6])。まず、名刺の中央から短辺の半分の長さの切込みをL字型に入れて、三枚を組み込んで、互いに直交するようにします(図10)。

すると、三枚のなす12個の頂点が丁度正二十面体の頂点の位置になり、凸包を作ると正二十面体が得られます。従って、各頂点を平面で切り取って、正五角形に置き換えると、サッカーボールが出来上がるという訳です(図11)。このプロセスを如何に滑らかに演出するかは本人の課題となりますが、これができたらハッとさせられること請負です。

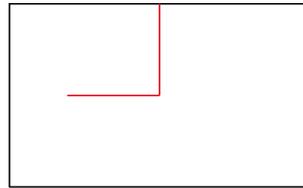


図 10. 三枚の名刺の組み込み

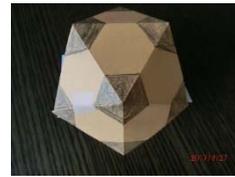
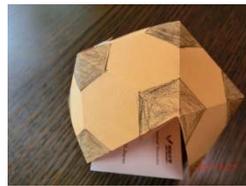


図 11. 三枚の名刺からサッカーボールへ

## 6. ホテルのランプシェード

折り紙モデルを産業化するとき、折り構造の複雑さの処理が壁となることを述べましたが、折り紙作品の美的価値を利用したものに出会いました。それは、前述のカンファレンス IDETC 2017 に参加するために泊まったホテル (Doubletree by Hilton in Cleveland) のランプシェード (図 12 左端) です。たまたまこのスタンドランプが私の客室にあり、「これは折り紙作品に違いない」と思ったら眠れなくなり、翌日の講演準備もそっちのけで、A4 のコピー用紙を取り出して、折り紙で作ってみたのが図 12 中央に示す形です。輪にして閉じればランプシェード (図 12 右端) です。開閉を自由におけば折畳式になりますが、しかしながら、やはり、複雑な折線が問題になります。ホテルのランプシェードの場合は、折り畳み式にせず、「プラスチック」製で整形型にして、折り紙のもつ形の美しさを表現したもののようです。折り紙作品の産業化にはこのような方法もあることに気づかされた出会いでした。



図 12. プラスチック製のランプシェードと折り紙によるランプシェード

## 7. 折り畳み式ヘルメット

さて、折り畳み式で産業化された最近の例を述べたいと思います。筆者はこの十年間、閉じた多面体の連続的折り畳みに関する問題に取り組んできました。その詳細は後回しにして、ここで紹介する折り畳み式ヘルメットのカバーに、そこで得られた研究成果を応用しました。きっかけは、NHK総合番組「超絶凄ワザ！最強の帽子対決」への参戦依頼が当研究所所長だった萩原一郎氏にあり、我々四名と秦永段ボール会社社長の小澤氏とで一つのチームになって出演したことです。まず、帽子は小さな箱（縦 30 cm，横 20 cm，高さ 5 cm）に収納可能という条件でしたので、折り畳み式は大変有利です。勝敗を競うのは、重さ 5 kg の鉄球をできるだけ高いところから自然落下させても、衝撃が基準値を超えないことでした（[7]）。対戦相手は素材大手メーカーの株式会社カネカの精鋭若手グループで、素晴らしい素材を開発してきましたが、幸いにも我々のチームが勝利を収めることができました。参戦したときのヘルメットを図 13 に示し、その後、改良が進んで、現在市販されているものを図 14 に掲載しました。

カバーの構造はどちらも同じです。基本形は長方形の蛇腹折りで、その後でコーナーをホチキスなどで留めて出来上がりです（図 15）。このような簡単な作業で済み、広げると立体形状になります。

実は、開閉するときに、段ボールが適度に柔軟素材であることを利用しています。これを剛性素材で製作したときには、図 16 左図の影で示す三角形の部分（特殊領域）を「隙間を設けるか柔軟素材に置き換える」必要があります。この特殊領域の精確な形状は図 16 右図に示す変形を用いて計算すれば求まります。



図 13. 参戦したヘルメット



図 14. 市販されているヘルメット



図 15. ヘルメットのカバーの構造

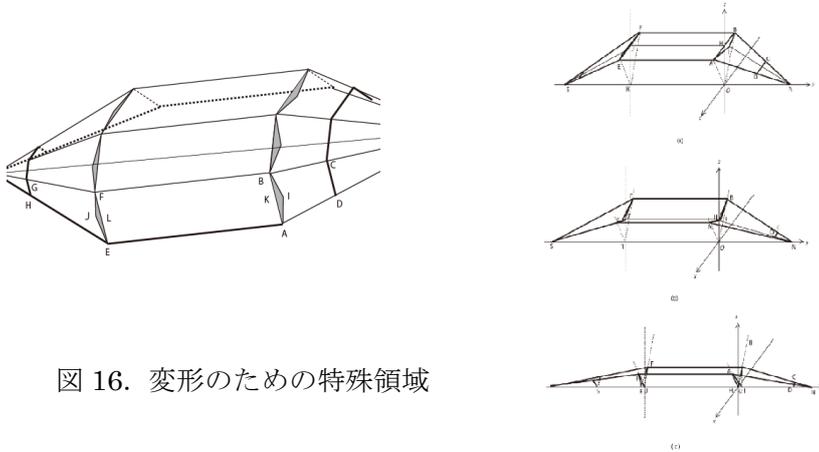


図 16. 変形のための特殊領域

ヘルメットの衝撃吸収材としては、ハニカム構造を用いていますが、折り畳み式にするために、上面と下面を「シートで留めない」という工夫をしています。

## 8. 連続折り畳みの数理

このあたりで、数学的背景について少し触れたいと思います。「紙のように折り目によって折れる厚みのない素材でできた多面体を、切ったり伸ばしたりせずに、平坦化できますか？」という問題が2001年に提出されました([8, 9])。これを解く鍵になったのが「移動折り目(移動辺)」の考え方です。

コーシーの剛性定理(1813年)によれば、「凸多面体は面の形が変わらなければ、合同な多面体以外には連続的に変形しない」です。そこで、「仮定の凸性を削除しても結論が成り立つのではないか」と予想されましたが、コネリーの反例(1978年)によってこの予想は覆されました。その後、「変形によって体積は変化するか否か」が問題となり、サビトフ(1995年)が体積保存定理を証明し、それによってフイゴ定理(1998年)「多面体が面の形を変えずに連続的に変形しても、その体積は不変である」が導かれました。

以上の事から言えることは、多面体を平坦化するためには、体積をゼロに減少させる必要があるので、「絶えず、どれかの面の形を変えていくために、移動折り目(移動辺)が必要である」ことが分かります。

多面体の移動折り目に関する最初の論文はたぶん筆者らの正多面体の結果[10]ですが、一般の凸多面体についても、異なる2つの方法で完全に解かれています([11, 12])。しかしながら、応用を考える時は、最初の論文で用いた「ひし形(タコ型)の翼折り」を用いるのが便利です(図17, [13])。(この折り方は証明を考えている時に筆者が思いついたものですが、以前から知られている折り方で名前などが既にありましたら、教えていただければ幸いです。)タコ型を翼折りにすると、境界の辺に折り目を入れずに二つの対頂点間の距離を調整できます。

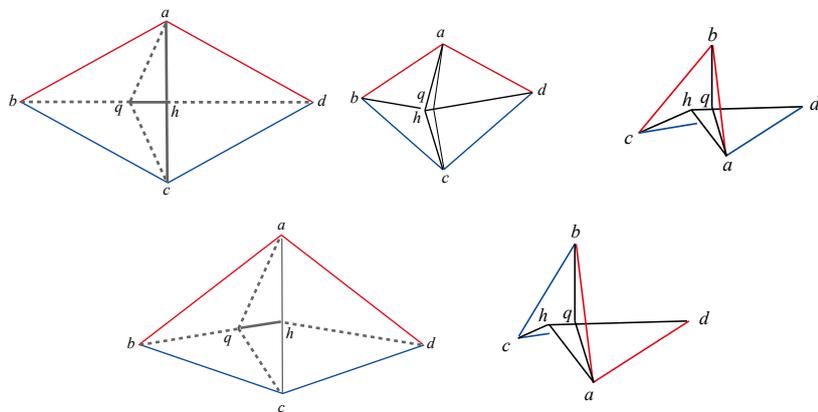


図 17. ひし形とタコ型の翼折り

例えば、ヘルメットカバーの場合には、図 16 右図において、各三角形と合同な三角形を長方形の面上に考えてひし形を作り、その対角頂点の距離の変化を計算することによって、図 17 の点  $q$  の位置が求まり、ひいては、移動折り目の領域を求めることができます。

### 9. 厚板の折り畳みボックス

厚板の折り畳み式ボックスを制作するには、まず、「移動折り目」の領域は「柔軟素材に置き換えるか隙間を設ける」ことになるので、この領域を求める必要があります。その領域は小さい方が望ましいので、ここでは、上面と底面を各 1 枚のパネルとし、向かい合う二つの左右の側面を内側へ倒すように二つ折りし、残りの前後の二面を 6 個に分割して外側へ押し出すように二つ折りします。このとき、「移動折り目」の領域を先ほどの「ひし形の翼折り」で求めます。図 18 の左から二番目の図の  $bufw$  をひし形の翼折りとみなして、その変化を調べれば求まります。他にも対処すべき点がありますが、詳細はさて置き、その結果を基礎にして、厚板の折り畳みボックスをデザインしました ([14])。モデルでは見やすくするために隙間を設けています。

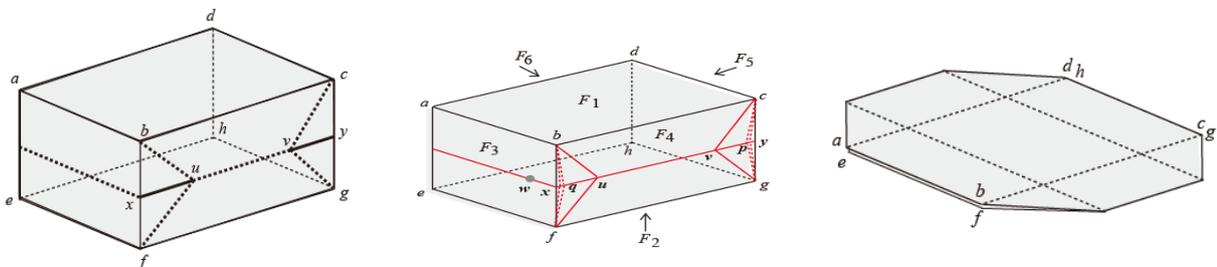


図 18. 厚みのないボックスの連続的折り畳み

さらに、上からの力に対して安定的であるように、「ヒンジサポーター」というパーツを新しく考案して、台形型のパネルの後ろに接着しています。このヒンジサポーターの役割は安定性の強化ばかりではなく、厚板のボックスがスムーズに平坦化されるためのヒンジの役割をしています。すなわち、前面の六枚に分割されたパネルの動きを調整する役目を果たしています。この状況を図 19 に示すようなシミュレーションモデルで確認し、その代表的な途中段階の形状を図 20 に示しました。

上述の手法を用いれば、他の多面体でも厚板の折り畳み式に出来る可能性がありますので、今後の課題としたいと思います。

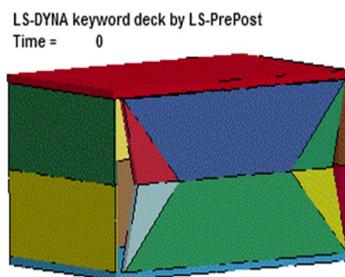


図 19. 厚板の折り畳みボックスのシミュレーションモデル

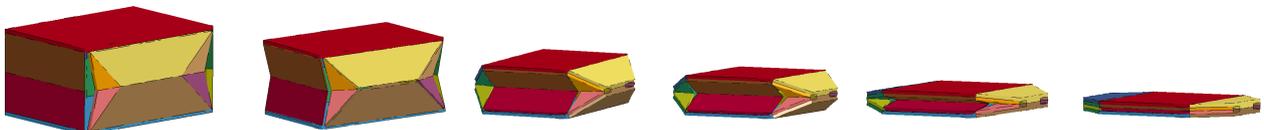


図 20. 変形アニメーション

## 10. イノベーション・ジャパンでの展示

最後に、2017年8月31日から9月1日の二日間にわたって開催された、東京ビッグサイトでの「イノベーション・ジャパン～大学見本市&ビジネスマッチング～」(NEDOとJST主催)について簡単に触れたいと思います。私の所属する大学からは「折紙工学～新たな工法による折紙工学の新展開～」による展示をし、折り畳み式ヘルメットや厚板ボックスなどイノベーションに役立てそうな6種類の例を紹介しました。上述以外では、数学の応用として、「振り角柱と反転らせん構造」が衝撃吸収材や防振構造に役立つことを紹介して注目を集めました。ここで述べる振り角柱は、正多角柱の底面を固定して、上面を回転させて、側面の各長方形を2つの三角形に置き換えてできた形です。この合同立体の複数個を互いに上面に乗せるようにして側面をつないでいけば、順螺旋構造になります。ま

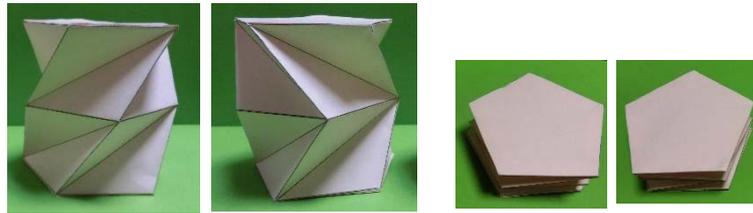


図 21. 捩じり角柱と反転螺旋構造

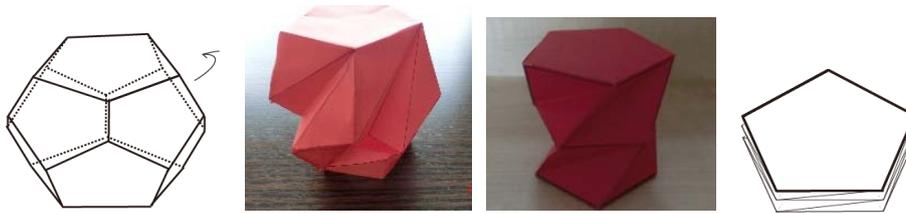


図 22. 正十二面体と捩じり角柱

た、この捩じる方向を交互にすると反転らせん構造が得られます (図21)。このとき、角柱の高さと捩じり角度を上手く調整すると、面の形を保存した平坦折り畳み可能な形になります。もちろん、フイゴの定理から、面の形を保存したままでは連続的に平坦化することはできませんが、柔軟素材を用いれば伸縮可能になり、この事実を利用してエネルギー吸収材や防振の構造に役立てることが出来ます。

ちなみに、正十二面体の連続的平坦折り畳みの途中段階にも2段の捩じり角柱が出現します (図22, [10, 15])。

終わりにあたり、国際語となった「折り紙」と折り畳み式製品の開発について、多種多様な側面と可能性を秘めていることを少しでもお伝えしたいと思っていた折りに、市民講演会での講演という機会をいただきましたことに深く感謝申し上げます。

#### 参考文献

- [1] Per Mollerup, "Collapsibles" Thames and Hudson, 2006.
- [2] <http://www.org-chem.org/origami/akuma.html>.
- [3] [https://www.ted.com/talks/robert\\_lang\\_folds\\_way\\_new\\_origami?language=ja](https://www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami?language=ja).
- [4] J. T. B. Obervelde et al., A three-dimensional actuated *origami*-inspired transformable metamaterial with multiple degrees of freedom. *Nat. Commun.* 7, 10929, 2016.
- [5] 村田三良, The theory of paper structure (折紙についての考察)(2), *Bulletin of Oita prefectural Junior College of Art* 5, 29 - 37, 1966.

- [6] 中村義作, “マンホールのふたはなぜ丸い?” 日本経済新聞社, 1984.
- [7] 奈良知恵, 折り紙のヘルメット話, 折紙探偵団159号(2016) 13–15, 2016.
- [8] E. Demaine, M. Demaine, and A. Lebiw, Unpublished paper, 2001:
- [9] E. Demaine and J. O’Rourke, “Geometric folding algorithms, Linkages, Origami, Polyhedra”, Cambridge, 2007.
- [10] J. Itoh and C. Nara, Continuous flattening of Platonic polyhedra, LNCS 7033, Springer, 2011, 108–121.
- [11] J. Itoh, C. Nara, and C. Vilcu, Continuous flattening of convex polyhedral, LNCS 7579, Springer, 2012, 85–97.
- [12] Z. Abel, E. Demaine, M. Demaine, J. Itoh, A. Lebiw, C. Nara, and J. O’Rourke, Continuously Flattening Polyhedra Using Straight Skeletons. *Proc. SoCG* 2014, 396–405.
- [13] C. Nara, Continuous flattening of some pyramids, *Elem. Math.*, 69 (2014) 45–56.
- [14] 奈良知恵, 萩原一郎, 楊陽, 暁詩, 厚板の折り畳み式ボックスと支持棒, 投稿中.
- [15] T. Horiyama, J. Itoh, N. Katoh, Y. Kobayashi, C. Nara, Continuous folding of regular dodecahedra, LNCS 9943, Springer, 2016, 120–131.