第 22 回藤岡おもしろ数学教室

シャボン玉とシャボン膜にひそむ数学

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所
小磯　深幸

第 22 回藤岡おもしろ数学教室は，藤岡市と藤岡市教育委員会の主催，日本数学会と関孝和先生顕彰会の後援により，2017 年 10 月 12 日（木）に藤岡市立鬼石中学校体育館で開催され，同中学校の全生徒約 120 名が参加されました．小磯が表題の講演を行いましたが，講演スライドの作成及び当日の助手として，九州大学大学院数理学府博士後期課程 1 年生・軸丸芳揮君と同修士課程 2 年生・奥田健斗君にご協力いただきました．

講演の目標は「身近な話題を用いて数学の汎用性や『証明する』ことの意義を知ってもらうこと，数学を学ぶことにより得られるわくわく感や今後さらに数学を学ぶことに対する期待を感じてもらうこと」と定め，あらかじめ藤岡市教育委員会にお知らせしておいた講演概要は次のものでした．「針金で作ったいろいろな形の枠に石けんの膜を張らせてみましょう．針金枠を工夫すると，驚くほどきれいなシャボン膜を作ることができます．本講演では，実際にシャボン膜を作ってお見せしながら，その美しさのひみつを解明していきたいと思います．また，聴講される皆様には，当日配布致しますワークシートで作業をしていただくことにより，その解明の過程にご参加いただきたいと存じます．」

本稿では，石けん膜の実験・観察を含め 1 時間余りの講演の内容の要約を述べ，当日の講演スライドを本報告のあとに付けて内容の詳しい紹介に代えさせていただきます．ただし，著作権の問題等により，講演で使用した画像のうちの幾つかを消去あるいは変更しています．なお，約 1 年前にも概ね同じ内容の講義を藤岡市立小野中学校で行い，その報告が「第 21 回藤岡おもしろ数学教室『近道とシャボン膜の数学』」として「数学通信」 第 22 巻第 1 号 (2017 年 5 月号) に掲載されていますが，スライドは大幅に改訂しています．

さて，当日の講義では，まず，様々な針金枠に石鹸膜を張らせてそれらの形を観察し，石鹸膜の形を決める原理（面積を最小にする形となることや，複数個の石鹸膜が出会う時には必ずその枚数は 3 であり互いに 120 度の角を成すことなど）の

説明を行いました．次に，平面内の三点を結ぶ最短ネットワークを求める問題を説明し，シュタイナー点と呼ばれる点が最短ネットワークを与えることを証明しました．そして，この最短ネットワークが石鹸膜によって実現されることを実験により確かめました．最後に，問題の幾つかの方向への一般化を述べました．

そのあと，質疑応答の時間が設けられ，シュタイナー点を利用して何か生活に役立てられることがあるか，数学の研究の面白さはどこにあるか，数学が出来るようになるにはどうしたら良いか，などの質問が生徒さん達から出され，小磯及び助手の軸丸君と奥田君が返答しました．

最後に，生徒会長の生徒さんからのしっかりしたお礼のご挨拶があり，さらに全校の生徒さん達による合唱曲「ビリーブ」の素晴らしい合唱のプレゼントをいただき，大きな感動と共に閉会となりました．

なお，鬼石中学校は立派なホームページを作っておられ，「第 22 回藤岡おもしろ数学教室」の様子も「学校日記」というページで紹介されています．そこには，生き生きとした表情で石鹸膜に見入る生徒さん達の写真を含め多数の写真も掲載されています．

さて，群馬県では，1947 年に上毛かるた（じょうもうかるた）と呼ばれる全 44 枚のかるたが発行され，そこでは群馬県の歴史・自然・人物・産業などが読まれています．このかるたの最後の札は「和算の大家　関孝和」というもので，鬼石中学校の生徒さん達は皆それを暗記しているようでした．なお，関孝和の出身は藤岡市という説があることがかるたの所以とのことです．校長先生から，お土産に上毛かるたと私の講義を撮影した CD をいただき，鬼石中学校をあとにしました．

最後に，今回の講演及び実験を行うに当たり，藤岡市教育委員会の教育長，生涯学習課の方々，藤岡市立鬼石中学校の校長先生，副校長先生，数学の先生方を始めとし，関係の方々に大変お世話になりました．この場を借りて御礼申し上げます．

第22回おもしろ数学教室

シャボン玉とシャボン膜にひそむ数学

講師:　　小磯　深幸　(こいそ　みゆき)
(九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所　教授)

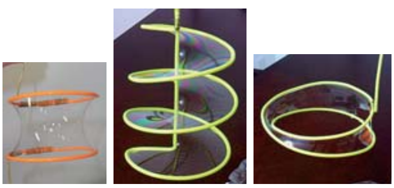
藤岡市立鬼石中学校

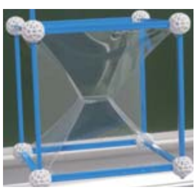
2017年10月12日(木)

自己紹介

研究分野:数学の中の幾何(きか)学(図形を研究する分野)
研究課題:変分問題:「最も効率(こうりつ)の良い形」を求める研究

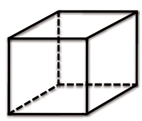
たとえば, 石けんまくはまくにはたらく力(表面張力)ができるだけ小さい形になります. 表面張力は面積に比例するため, 面積(めんせき)ができるだけ小さい形になります. シャボン玉は, 中に空気を包んだ状態(じょうたい)でできるだけ表面積が小さい形になります.
固体の結晶(けっしょう)も, 表面張力ができるだけ小さい形になりますが, 固体の表面張力は表面積には比例しません.





わくにはらせた石けんまくたち

シャボン玉はまるい



塩の結晶は立方体

今日，助手を務める方々の紹介

軸丸 芳揮（じくまる よしき）君：
九州大学大学院博士課程（はかせかてい）１年生

結晶（けっしょう）の形を数学的に解明（かいめい）することにつながる研究をしている．

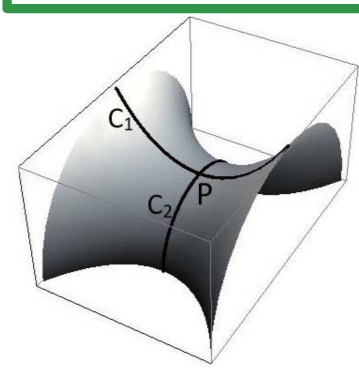
奥田 健斗（おくだ けんと）君：
九州大学大学院修士課程（しゅうしかてい）２年生

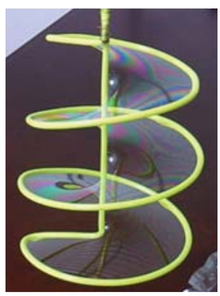
シャボン玉や液滴（えきてき）の形を数学的に解明することにつながる研究をしている．

石けんまくの秘密(1)

石けんまく上のかってな点Pを通る互いに直交する二つの平面で切ったときの切り口の曲がり具合いの平均がいつも０．

下の図では，曲線C_1と曲線C_2の点Pでの曲がり具合いが同じで，互いに逆向きに曲がっています．

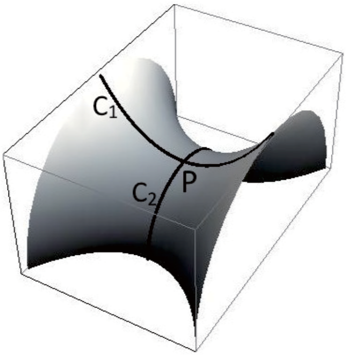




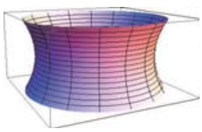
石けんまくの秘密(1)

石けんまく上のかってな点Pを通る互いに直交する二つの平面で切ったときの切り口の曲がり具合いの平均がいつも０.

この性質により，石けんまくの形は数学の式でかくことができます！

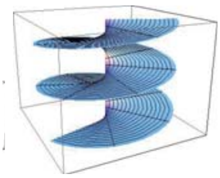


下図：左の2つは石けんまくの写真．右の2つは数学で作られた面積最小曲面．



けんすい面

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{a}{2}\left(e^{z/a}+e^{-z/a}\right),\ (a>0)$$



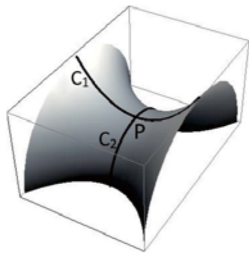
常（じょう）らせん面

$$x=u\cos v,\ \ y=u\sin v,\ \ z=kv$$

石けんまくの性質

石けんまく上のかってな点Pを通る互いに直交する二つの平面で切ったときの切り口の曲がり具合いの平均がいつも０

面白い形をしている！



面積ができるだけ小さい形．

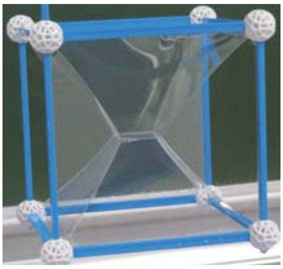
力のかかり具合いのバランスが良い．

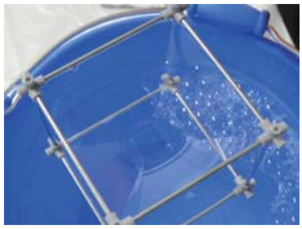
これらのせいしつにより，石けんまくの形が建築（けんちく）に利用されることがあります．

たとえば，ミュンヘン（ドイツ）にあるオリンピックスタジアムの屋根は，石けんまくの形を使ってデザインされました．

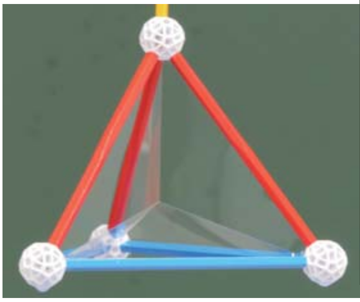
石けんまくの秘密(2)

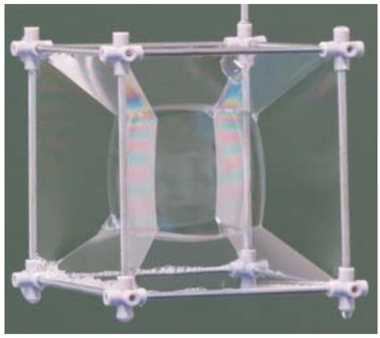
石けんまくは，いつも120°でしか交わらない！





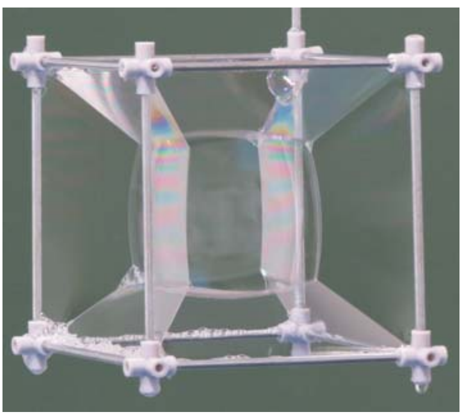
泡も！

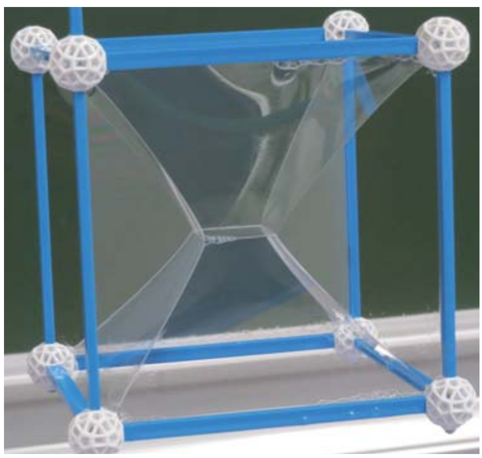




今日のお話

下の写真は，立方体の形をした針金のわくに石けんのまくを張らせたものです．
右は中に正方形が，左は中に球形ではないシャボン玉ができています!



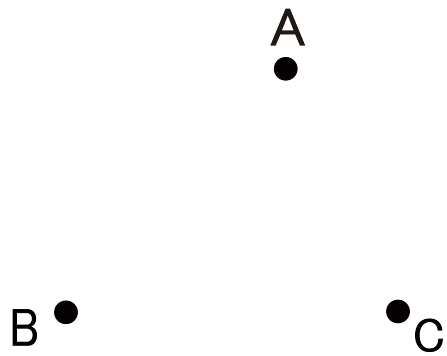


今日は，石けんまくやシャボン玉が面積最小という性質を使って上の現象が起こる理由を説明します．

1. 近道を探しましょう

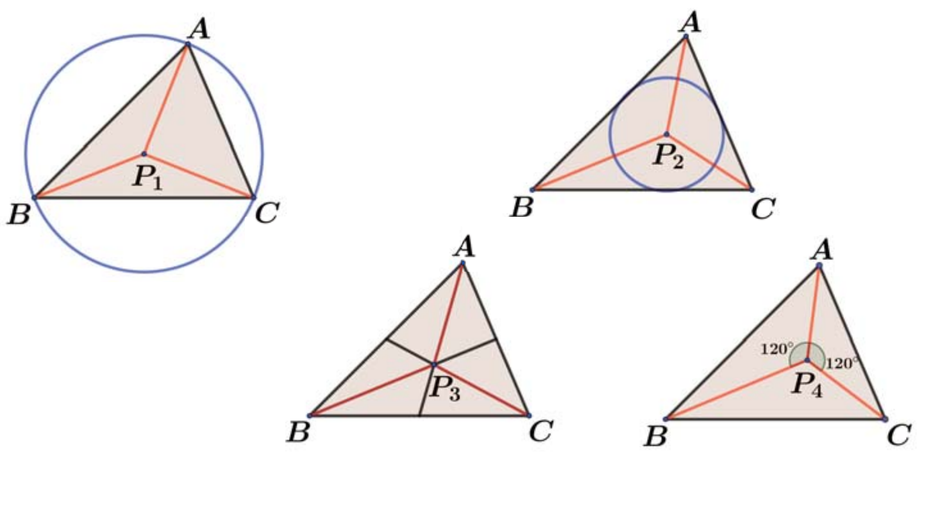
前橋市（点A），藤岡市（点B），太田市（点C）をつなぐ電力ケーブルを設計しましょう.

ただし，できるだけ全長が短くなるようにします.

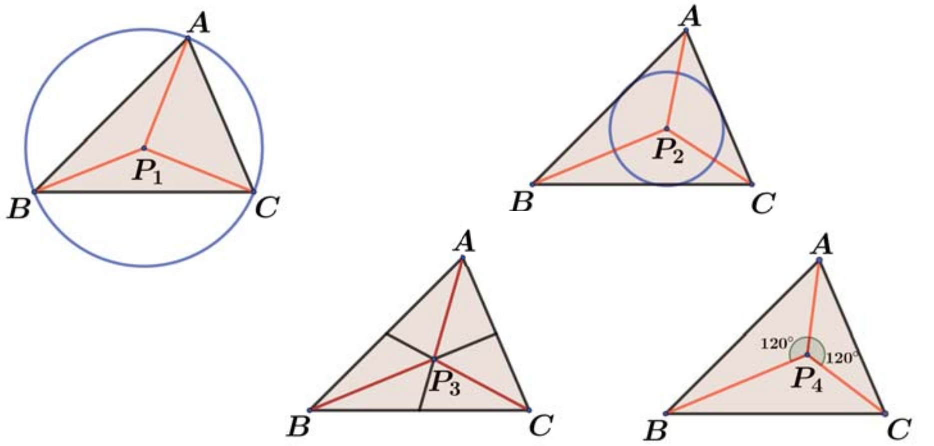


ワークシートの点P_1，P_2，P_3，P_4 は，それぞれ，三角形ABCの外心，内心，重心，Steiner（シュタイナー）点と呼ばれています.

定規で測って，長さ $\ell_1=AP_1+BP_1+CP_1$，$\ell_2=AP_2+BP_2+CP_2$，$\ell_3=AP_3+BP_3+CP_3$，$\ell_4=AP_4+BP_4+CP_4$ を求めましょう.
$\ell=AB+BC+CA$ も求めましょう. 一番短いのはどれでしょう？



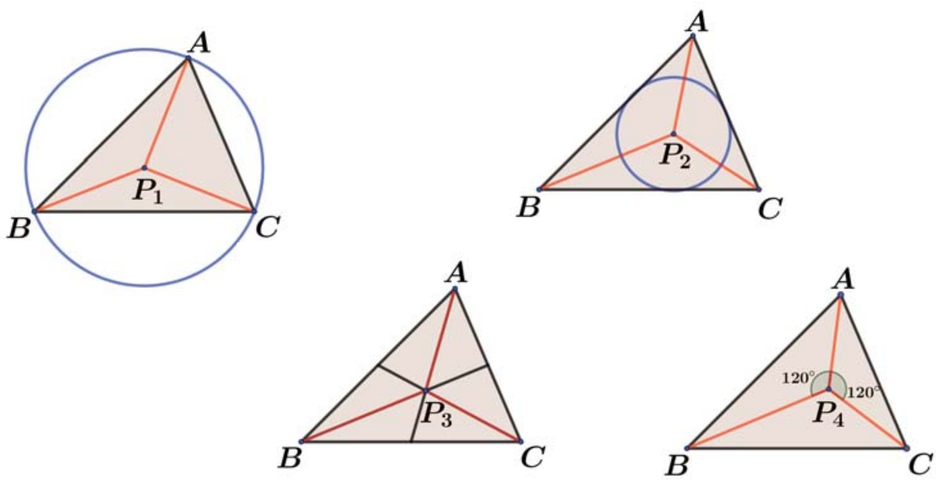
$\ell_1 = AP_1 + BP_1 + CP_1 =$？



私がはかった結果は,

$\ell_1 = AP_1 + BP_1 + CP_1 = 8.85\text{cm}$

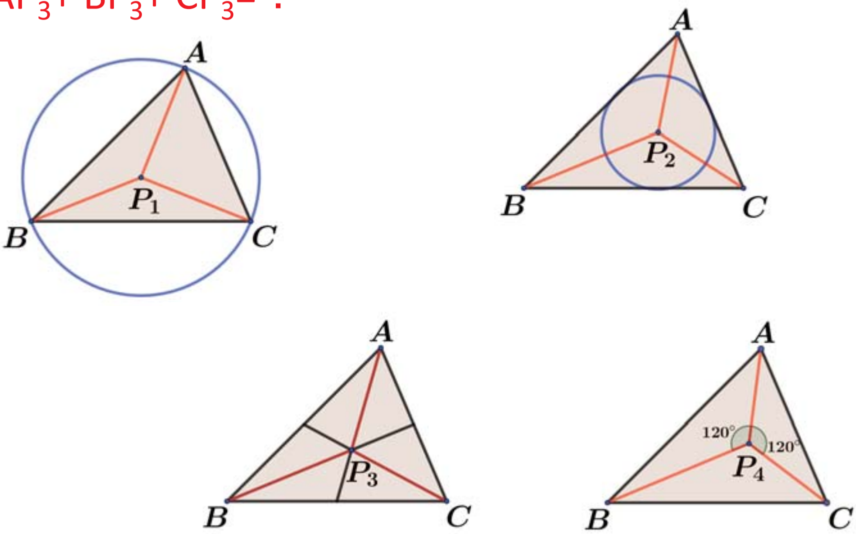
$\ell_2 = AP_2 + BP_2 + CP_2 =$？



私がはかった結果は,

$\ell_1=AP_1+BP_1+CP_1=8.85\text{cm}$,　$\ell_2=AP_2+BP_2+CP_2=8.65\text{cm}$

$\ell_3=AP_3+BP_3+CP_3=$？



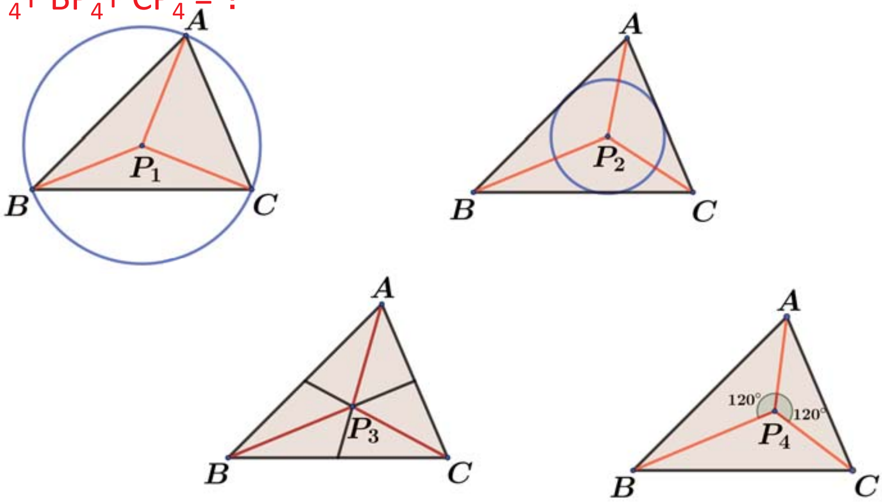
私がはかった結果は,

$\ell_1=AP_1+BP_1+CP_1=8.85\text{cm}$,

$\ell_2=AP_2+BP_2+CP_2=8.65\text{cm}$,

$\ell_3=AP_3+BP_3+CP_3=8.75\text{cm}$

$\ell_4=AP_4+BP_4+CP_4=$？



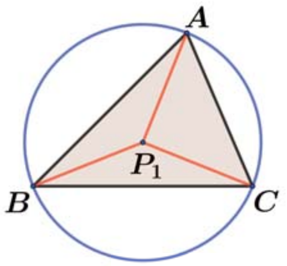
私がはかった結果は，

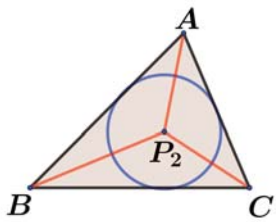
$\ell_1 = AP_1 + BP_1 + CP_1 = 8.85$cm，　$\ell_2 = AP_2 + BP_2 + CP_2 = 8.65$cm，

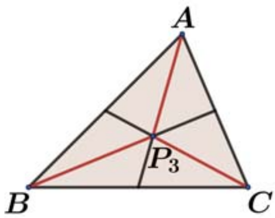
$\ell_3 = AP_3 + BP_3 + CP_3 = 8.75$cm，　$\ell_4 = AP_4 + BP_4 + CP_4 = 8.55$cm，

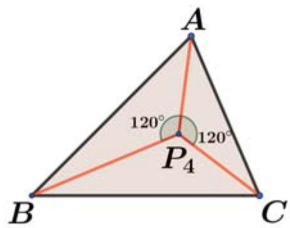
$\ell = AB + BC + CA = 15.1$cm

ℓ_4 が最も（もっとも）短いですね．







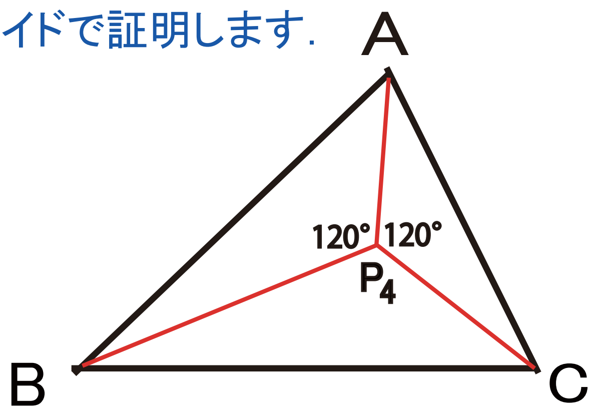


三角形ABCの三つの内角がすべて120度よりも小さい時，三点A, B, Cをむすぶ最短（さいたん）のネットワークは，シュタイナー点P_4 とA, B, Cをむすんだもの

$$AP_4 + BP_4 + CP_4$$

となります．

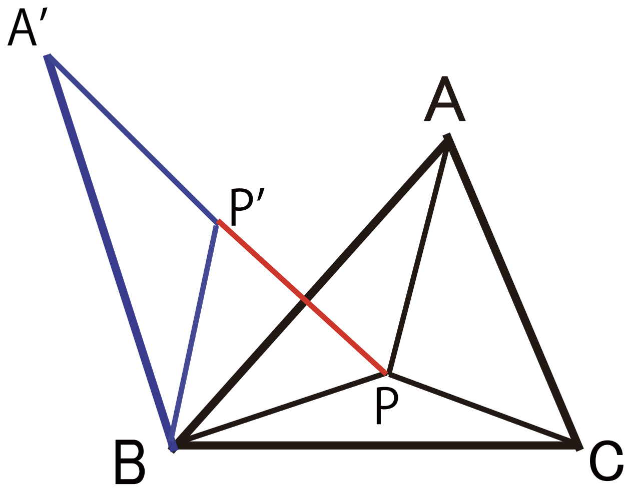
このことを，次のスライドで証明します．



△APB を点B を中心に60°回転させた三角形を△A’P’B とすると，

PB＝P’B，∠PBP’＝60°

より，△BPP’は正三角形となります．



よって，PB＝P’B＝P’P･･･① また，PA＝P’A’･･･②
①，②より，PA＋PB＋PC＝A’P’＋P’P＋PC･･･③

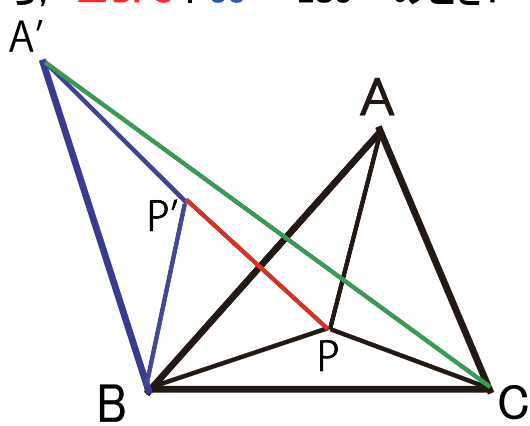
ここで，折れ線A’P’PC の長さがもっともみじかくなるのは，折れ線が直線A’C（まっすぐ）になるときである．

ゆえに③より，PA＋PB＋PC がもっともみじかくなるのは，A’，P’，P，C が同じ直線上にあるときであるから，
∠BPC＋∠BPP’＝180°，すなわち， ∠BPC＋60°＝180° のとき．

よって，
∠BPC＝180°―60° ＝ 120°

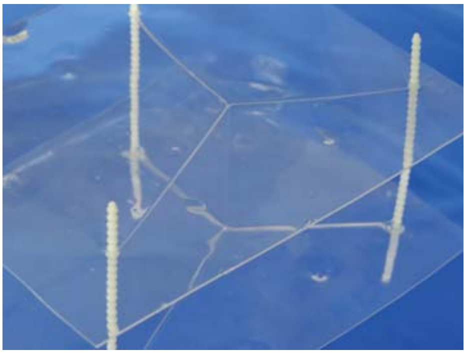
同様にして，
∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°

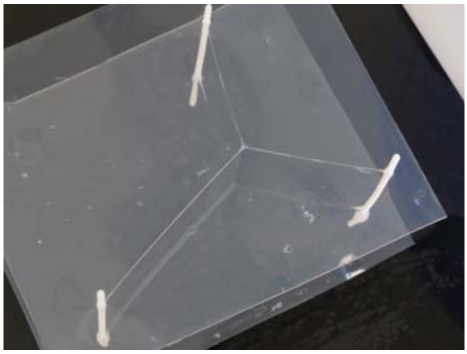
のときである．（証明終）



石けんまくは答えを知っている？

上の３点A, B, Cの状況を，プラスチックの板と棒で作る.それを，石けん液につけてそっと引き上げると，下図のような膜（まく）が張る.石けん膜は，膜にかかる力ができるだけ小さくなるように，すなわち，面積ができるだけ小さくなるよう形になる. したがって，プラスチックの板を上から見たときの膜の線の長さの和が最小になっている！　つまり，三まいのまくが互いに120°で交わっている！





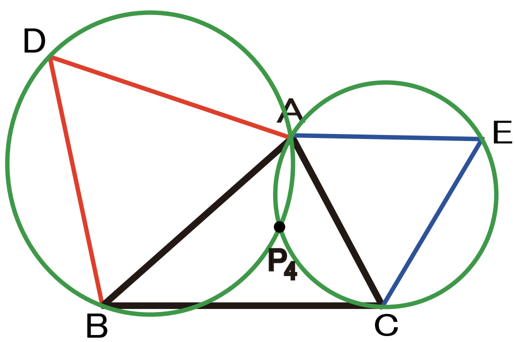
シュタイナー点を作図しよう

右下図のように，辺ABを一辺とする正三角形ABDをかきます.

さらに，辺ACを一辺とする正三角形ACEをかきます.

つぎに，点A, B, Dを通る円をかきます.
そして，点A, C, Eを通る円をかきます.

これら二つの円の交点が，シュタイナー点です!



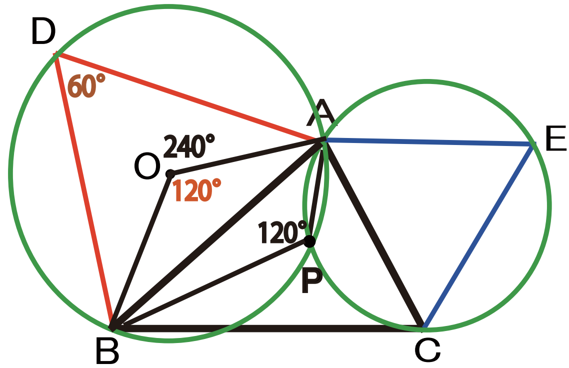
緑色の二つの円の交点 P が，シュタイナー点であることを確かめよう.

∠ADB＝60°　である．対応する中心角∠AOBは円周角∠ADBの2倍だから，∠AOB＝120°　である.

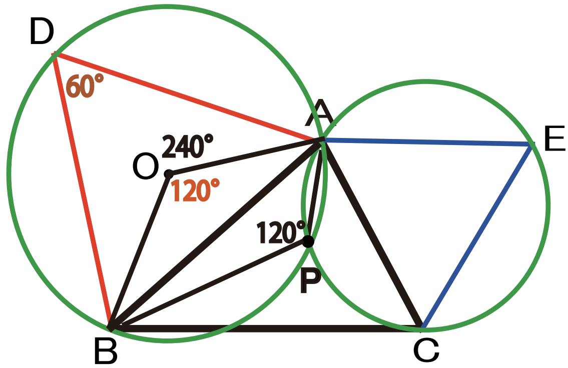
この時，円周角∠APBに対する中心角は 240°　だから，∠APB＝120°　である.

同じようにして，
∠APB＝∠BPC＝
∠CPA＝120° である.

ゆえに，Pはシュタイナー点である.　　（証明終）

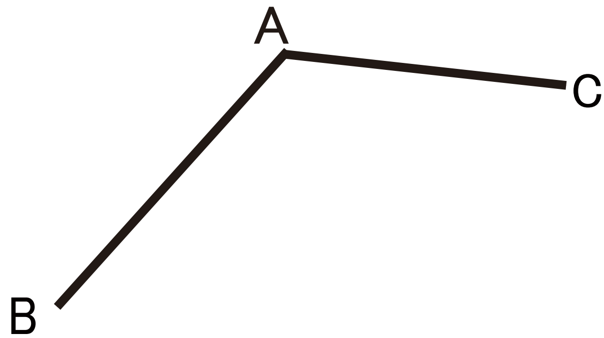


∠CAB　が 120°　よりも大きいときは，シュタイナー点は決まるでしょうか？
ちょうど ∠CAB = 120°　のときはどうでしょうか？

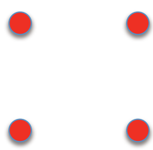


∠CAB　が 120°　よりも大きいか，または等しいときは，シュタイナー点は求まりません．

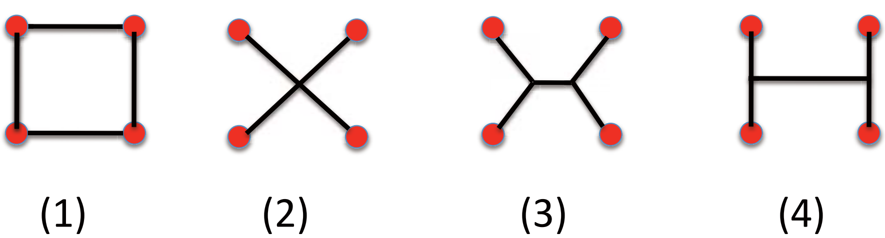
A, B, Cを結ぶ最短ネットワークは，折れ線BACとなります．



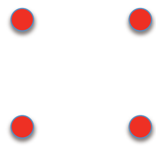
下の図ような四点をつなぐ
最短のネットワークは？



ネットワークの候補を4つあげましょう．最も短いものは?

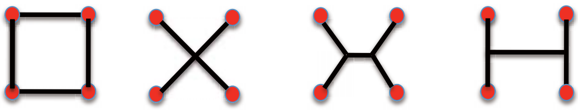


右の図ような四点をつなぐ
最短のネットワークは？

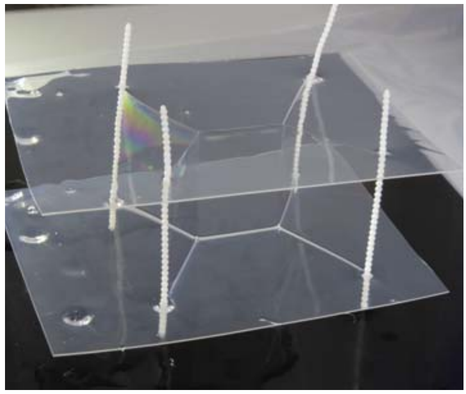


互いに120°の角を成す線分たちより成ります！

つまり，下の図の(3)が正解です.



(1) (2) (3) (4)

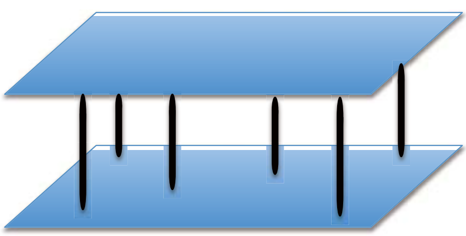


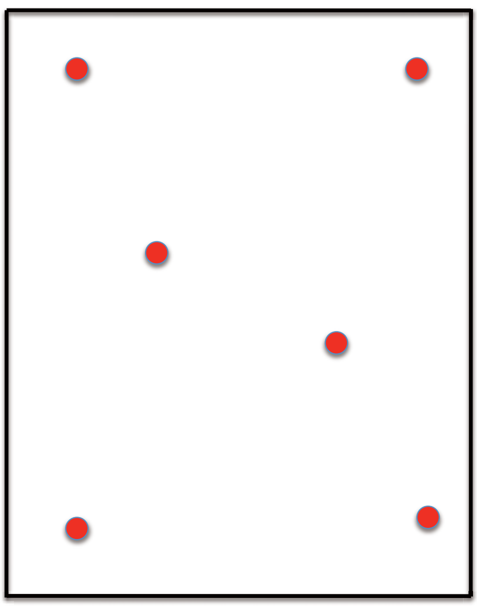
右の写真：
石けんまくも答えを
知っていますね！

シャボン玉や石けんまくは，いつも120°
でしか交わりません！

右の図の6つの点をむすぶ
最短（さいたん）ネットワーク
を作図してみましょう.

あるいは，2枚の板と6本の軸で
下図のような道具を作り，
石けんまくの実験（じっけん）を
するのも楽しいですね.





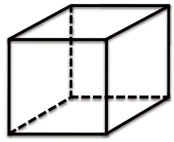
おわりに

石けんまくの美しい性質や形を楽しんでいただけたでしょうか？

数学の理論は一つ作れば，石けんまくの形にもブラックホールの形にも，水滴，赤血球，．．．といろいろなものに応用できます．

食塩の結晶や金属の結晶（けっしょう）のようにかどがある物体について数学で調べるのはむずかしく，研究が発展（はってん）中です．

シャボン玉



食塩の結晶は立方体

みなさんの中に，しょうらい，数学で結晶（けっしょう）の形を解明（かいめい）する方がいらっしゃるかもわかりませんね！

これで私の講義は終了です．
皆さん，ご参加ならびにご清聴ありがとうございました．