授賞報告
2018年度日本数学会代数学賞

2018 年度日本数学会代数学賞は，佐藤周友氏（中央大学理工学部），内藤聡氏（東京工業大学理学院），日比孝之氏（大阪大学大学院情報科学研究科）が授賞されました．

佐藤周友氏「数論的スキームに対する新しいコホモロジー理論とその応用」

数論的スキームとは整数環上有限型なスキームのことで，代数体上の多様体（たとえばモジュラー曲線）の整数環上のモデルなどがその典型的な例であり，数論幾何学においては重要な研究対象です．佐藤周友氏は，それ以前には存在しなかった数論的スキームに対するよいコホモロジー理論をエタールコホモロジー理論を用いて構成しました．また応用としては，数論的スキームのゼータ関数の特殊値問題や数論的スキームのモチフィックコホモロジーの研究に大きな貢献をもたらしました．

エタールコホモロジー理論は 1960 年代 Grothendieck が Weil 予想を解決するために開発したスキームのコホモロジー理論で数論幾何学の礎ともいえる重要な理論です．一般にスキーム X のエタールコホモロジーは，「コホモロジー群の係数が X の各点の剰余体の標数と素である」という条件のもとによい定義が存在していました．体 k 上の多様体を考える時には，コホモロジー群の係数が k の標数と互いに素であればよいわけです．ところが，たとえば X が整数環のスペクトラムとすると X の剰余体たちの標数として全ての素数が現れます．よって一般に数論的スキーム X に対する上述の条件が本質的な制約であることがわかります．以下素数 p を固定します．佐藤氏は p-進消滅サイクルに関して非常に深い研究を行うことにより，正則で半安定な還元をもつ数論的スキーム X に対する全く新しい p-進係数コホモロジー理論を構成し，（p が X の点の剰余体の標数と素でない状況においても）p が X の各点の剰余体の標数と素である場合と同様なよい性質を持つことを示しました．以下，この新しいコホモロジー理論を**佐藤コホモロジー**と呼ぶことにします．特に，佐藤コホモロジーに対する**コホモロジー群の有限性**と**ポアンカレ双対性**は重要な結果であります．これらの結果は，p-進消滅サイクルの精緻な計算に基づくもので，このような非常な技術的困難を克服した佐藤氏の力量には感服せざるを得ません．

次に佐藤コホモロジー理論の応用をいくつか述べます．佐藤コホモロジーの最初の応用として，数論的スキームのゼータ関数の特殊値（つまり整数点での冪級数展開の最初のゼロでない係数）への応用が挙げられます．代数体の Dedekind ゼータ関数の $s = 0$ での特殊値を与える公式（いわゆる類数公式）においては，代数体のイデアル類群や単数群が登場しますが，これらの数論的不変量は佐藤コホモロジーを用いて表すことができます．Dedekind ゼータ関数を一般化した数論的スキーム X のゼータ関数の特殊値に対しても，佐藤コホモロジーを用いて表示することが可能であると期待されています．実際，**X が代数体上の曲線の整数環上のモデルの場合は，Bloch–加藤の玉河数予想を認めるとこのような表示が可能である**ことが佐藤氏により示されています．数論的スキームのゼータ関数の特殊値に対し

てはBirch–Swinnerton予想，Beilinson予想，さらにこれらを精密化したBloch–加藤の玉河数予想といった名高い予想が数論幾何学の中心的問題として存在しますが，佐藤氏のコホモロジーはこの問題に対して新たな展望を与えるものといえます．

次に佐藤コホモロジーの数論的スキームの**高次Chow群**への応用について説明します．高次Chow群はBlochにより定義されたスキームに付随する重要な不変量です．Chow群が最も基本的な例ですが，代数体のイデアル類群や単数群も数論的スキームの高次Chow群の特殊な例として見ることができます．これは高次Chow群が代数幾何のみならず整数論においても重要な役割を果たすべき存在であることを示唆しています．Blochは，体上の滑らかな多様体にたいして高次Chow群が**モチフィックコホモロジー**に期待される性質を持つことを示しました．モチフィックコホモロジーを歴史の舞台に初めて登場させたのはGrothendieckです．代数多様体に付随する様々なコホモロジー理論の中で普遍的なコホモロジー理論が存在することを彼は想定しました．Beilinsonがこれをより正確な予想として定式化して以来，モチフィックコホモロジー理論は数論幾何の中心的問題として世界的に活発な研究が行われてきました．

高次Chow群あるいはモチフィックコホモロジーが整数論においても非常に重要視される理由のひとつは，数論的スキームのゼータ関数の整数点での位数や特殊値をあらわす予想（先述したBirch–Swinnerton予想，Beilinson予想，Bloch–加藤予想）においてモチフィックコホモロジーが基本的な役割を果たすことであります．これに関連するもうひとつの基本的な予想が次の高次Chow群にたいする有限性予想です．

予想：X を数論的スキームとすれば，その高次Chow群は有限生成である．

この予想は上述の数論的多様体のゼータ関数の特殊値の予想においても仮定されている数論幾何学の基本的な予想あります．予想が成り立つことが知られている基本的な例として，X を代数体の整数環としたとき，その高次Chow群としてその代数体のイデアル類群および単数群が現れます．よって上の予想は古典的整数論から知られているこれらの群の有限性定理の高次元スキームへの一般化であるといえます．最近までこの予想に対する肯定的な結果はこの例を除いて殆ど知られておりませんでした．

佐藤氏は，**数論的スキームの高次Chow群から佐藤コホモロジーへのサイクル写像**を定義しました．一方，先述したように佐藤氏は佐藤コホモロジーの有限性定理を示しています．よって佐藤氏のサイクル写像の同型が示されれば高次Chow群の有限性も得られます．これは今まで手がかりが殆どなかった高次Chow群の有限性予想への重要な貢献を与えるものです．実際，Jannsen氏と斎藤秀司氏の共同研究により，ある条件の下で佐藤氏のサイクル写像が同型であることが示されています．

佐藤コホモロジーの構成は，Beilinson–Lichtenbaumによる**モチフィック複体**（つまりそのコホモロジー群がモチフィックコホモロジーを与えるようなZariski層の複体で，Blochの高次Chow群を与えるサイクル複体をZariski層化したもの）を具体的に計算したいという動機によっています．実際，**佐藤氏のサイクル写像が，佐藤コホモロジーを定義するために佐藤氏が構成したエタール層の複体とモチフィック複体の p-進係数版のエタール層化の間の同型を導く**ことを佐藤氏は示しました．

総じていえば，佐藤氏の業績はモチフィックコホモロジー理論という哲学的指導原理に支

えられ，p-進 Hodge 理論などの深い理論を駆使し，さらに強力な計算力に裏打ちされたものといえます．佐藤氏の業績は世界的にも高い評価を得ており，代数学賞を受賞するのに相応しいものであります．

内藤聡氏「量子アフィン代数の表現論」

内藤聡氏は, 量子アファイン展開環上の加群の結晶基底の実現をめぐる種々の問題において佐垣大輔氏との共同研究により卓越した業績をあげてきました．なかでも extremal ウエイト加群の結晶基底に対して Lakshimibai–Seshadri パス（略して LS パス）による実現を与えたこと, その応用として Kirillov–Reshetikhin–加群（略して KR-加群）のテンソル積と Macdonald 関数との間の結び付きを与えるある種の等式「$X = P$ 定理」の統一的な証明を与えたこと, LS パスとは異なる結晶基底の幾何的実現である Mirkovic–Vilonen polytope に対する結晶構造の研究などが特筆すべき成果です．以下では LS パスをめぐる話題に的を絞って, 簡単に説明します．

$U_q(\mathfrak{g})$ を対称化可能な Kac–Moody 代数 $\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環とするとき, 1990 年代初頭, 柏原正樹氏によって, 支配的整ウェイト λ を最高ウェイトとする既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V(\lambda)$ 上に, 結晶基底 $\mathscr{B}(\lambda)$ が構成され, それらの結晶基底の持つ組合せ論的な性質を抽出してクリスタルの概念が得られました．柏原氏はさらに最高ウェイト加群の拡張として, 任意のウェイト λ に対する extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ を導入し, $V(\lambda)$ が結晶基底 $\mathscr{B}(\lambda)$ を持つことを示しました．結晶基底の存在は重要な結果ですが, その構成は複雑であり, 結晶基底のより具体的な実現を与えることが表現論の大きな課題となっています．

LS パス $\mathbf{B}(\lambda)$ とは Littelmann によって導入された（支配的とは限らない）任意の整ウェイト λ に対して定まるある種の区分的線形写像の集合上に構成されたクリスタルです．λ が支配的な場合には $\mathbf{B}(\lambda)$ はクリスタルとして $\mathscr{B}(\lambda)$ に同形になり（柏原, Joseph）, これによって最高ウェイト加群の場合に, 結晶基底の LS パスによる実現が得られます．その一般化として extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ の結晶基底に対する LS パスによる実現が問題になります．以下では $U_q(\mathfrak{g})$ を量子アファイン展開環とし, λ はレベル・ゼロであると仮定します．内藤氏は佐垣氏と共に, ϖ_i $(i \in I_0)$ をレベル・ゼロ基本ウェイトとするとき extremal ウェイト加群 $V(m\varpi_i)$ の結晶基底はクリスタルとして $\mathbf{B}(m\varpi_i)$ と同形になることを示しました．さらに, 一般の λ を扱うために $\mathfrak{g}$ が untwisted アファイン Lie 代数の場合に, Littelmann による LS パスの定義を拡張して, semi-infinite LS パス（略して siLS パス）の概念を導入し, siLS パスの集合 $\mathbf{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ にクリスタルの構造を定義して任意のレベル・ゼロ支配的ウエイト λ に対する $\mathscr{B}(\lambda)$ が $\mathbf{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ とクリスタルとして同形になることを示しました．この結果は LS パスによる結晶基底の実現に関する一つの到達点とみなせる優れた結果です．

$U'_q(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の導来部分代数 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ に付随する $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数, $U_q(\mathfrak{g}_0)$ を $\mathfrak{g}$ の有限次元部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ に付随する部分代数とします．KR-加群 $W_s^{(i)}$ とは, $s \in \mathbf{Z}_{\geq 1}, i \in I_0$ に対して定まるある種の $U'_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現の族であって, 多くの場合に結晶基底を持つことが知られています．テンソル積 $W_{s_1}^{(i_1)} \otimes \cdots \otimes W_{s_k}^{(i_k)}$ の $U_q(\mathfrak{g}_0)$ 加群への分解を記述するのが Kirillov–Reshetikhin 予想で, その q-類似として考えられたのが $X = M$ 予想です．X は結晶構造を使って定義され，1 次元状態和と呼ばれています．どちらの予想も多くの場合

に確認されています．2 種類のパラメータ q, t を持つ対称関数である Macdonald 多項式 $P_\lambda(x; q, t)$ の $t = 0$ とおいた場合の意味付けについては今まであまり知られていませんでしたが, 最近, $P_\lambda(x; q, 0)$ が量子アファイン展開環の表現論と密接に関係している事実が相次いで発見され, 特に, KR-加群のテンソル積における次数付き指標 “X” が $P_\lambda(x; q, 0)$ に一致することが多くの場合に, 個別の計算で確かめられました（$X = P$ 定理）. 内藤氏は佐垣氏と共に $X = P$ 定理に対する $s_i = 1$ の場合の統一的な証明を与えました. 証明の概略は LS パスを使った X のクリスタルの記述を, （parabolic） 量子 Bruhat グラフを使って具体的に与え, 一方 $P_\lambda(x; q, 0)$ は量子アルコーブ・モデルと呼ばれるクリスタルによって記述し, 2 種類のクリスタルの同形を示すことによって統一的証明を与えるというものです. $X = P$ 定理の証明は, 内藤-佐垣による LS パスによる結晶基底の実現の見事な応用例と言えるでしょう.

内藤氏は佐垣氏とともに, さらに $V(\lambda)$ の Demazure 部分加群に対しても, その次数付き指標と Macdonald 多項式の特殊値との関連を示す興味深い結果を得ています.

以上の様に, 内藤氏は LS パスによる結晶基底の実現を軸に, Macdonald 多項式との関連において新生面を切り開くなど, その表現論に対する貢献は大きなものがあります. また, LS-パスと量子 Bruhat グラフとの結びつきが得られて, LS-パスは組み合わせ論の研究者の高い関心を呼んでいます. さらに内藤氏は量子展開環にとどまらず, 一般 Kac–Moody 代数の表現論においても多くの業績をあげています. このように多方面にわたって優れた結果を出していることは高い評価に値するものであり, 代数学賞を受賞するにふさわしいものです.

日比孝之氏「計算可換代数と組合せ論」

日比孝之氏は可換代数理論を駆使し，凸多面体，単体的複体などにまつわる組合せ論，単項式イデアルの理論，代数統計などの様々な分野の発展に多大な貢献をもたらし，今日 “computational/combinatorial commutative algebra” と呼ばれる分野の確立において中心的な役割を果たした．日比氏の研究業績は多岐にわたっており，その全てを紹介することは困難であるが，主要な業績について簡単に概要を紹介する．

Richard Stanley によって Cohen–Macaulay 環の理論を用いて上限予想が肯定的に解決され，トーリック多様体の理論を用いて単体的凸多面体の f 列に関する g 予想の必要性が証明されたことを契機とし，凸多面体の組合せ論と可換代数は密接な関係を持ち続けている．日比氏は可換代数の手法を駆使し，凸多面体の面や格子点の数え上げ理論の研究で多くの顕著な業績を上げた．特に，整凸多面体 P を n 倍に膨らませた凸多面体 nP に含まれる格子点の数によって定義されるエルハート多項式 $i(P, n)$，および，その母関数であるエルハート級数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} i(P, n)\lambda^n$ に関する日比氏の業績は重要である．例えば，エルハート級数の有理式表示における分子の多項式の係数列である δ 列と，ミラー対称性の文脈で重要な反射的多面体に関する「日比の回文定理」（Hibi’s palindromic theorem），すなわち，整凸多面体が反射的であることと δ 列が対称であることの同値性は日比氏の著名な業績の 1 つである．また，日比氏は分配束に付随するトーリック環について研究し，ASL （algebras with straightening laws） 構造を持つことを証明した．このトーリック環は今日，日比環（Hibi ring）と呼ばれ，計算可換代数の研究者にとって主要な研究対象となっているだけでなく，近年，表現論などの分野にも現れており一層広がりを見せている．さらに，大杉英史氏との

一連の共同研究ではグレブナー基底理論を通じて凸多面体の三角形分割やグラフに付随するトーリックイデアルについて研究し，多くの優れた研究成果を上げた．特に，グレブナー基底理論を駆使して発見した「単模三角形分割を持つが，いずれも非正則である凸多面体」は当該分野において非常に貴重な例となっており重要な研究成果である．

他方，Jürgen Herzog 氏との一連の共同研究では，外積代数におけるグレブナー基底理論，componentwise linear イデアル，binomial edge イデアルなどの興味深い新しい概念を次々に提唱し，数多くの研究者によって研究が継続され，その後の計算可換代数理論の発展に大きな影響を与えた．Herzog 氏との共著「J. Herzog and T. Hibi, “Monomial Ideals,” GTM 260, Springer, 2011」は当該分野において必読の書となっている．

日比氏は可換代数の統計学への応用に関しても顕著な業績を上げている．1990 年代，Diaconis と Sturmfels はトーリックイデアルの生成系を用いてマルコフ連鎖モンテカルロ法を実行することにより，分割表の検定を行う手法を発明した．日比氏は，大杉氏，統計学者である竹村彰通氏，青木敏氏との共同研究により，Diaconis と Sturmfels による統計モデルとトーリックイデアルの理論をさらに発展させ，可換代数理論を統計分野で活用する新しい研究分野「計算代数統計」を開拓し，当該分野で様々な画期的な概念を誕生させた．この共同研究は JST CREST プロジェクト「現代の産業社会とグレブナー基底の調和」の一環として遂行され，その集大成として編集・執筆した教科書「JST CREST 日比チーム編，グレブナー道場，共立出版，2011 年」は当該分野の入門書として好評を博している．

日比氏は以上のような顕著な研究成果のみならず，RIMS プロジェクト研究，科学技術振興機構の戦略的創造研究推進事業（CREST），科学研究費助成事業 基盤研究（S）などの大型プロジェクトを数多く手掛け，国際会議の開催などを通じて国際交流や若手研究者の育成に多大な貢献をもたらしている．以上の理由から，日比氏の業績および研究活動は代数学の発展に大きく寄与するものであり，代数学賞に相応しいものである．

（代数学賞委員会委員長　都築暢夫　東北大学大学院理学研究科）