書　評

格子からみえる数学

枡田幹也，福川由貴子 著，日本評論社，2013 年

北海道大学大学院理学研究院
吉永　正彦

1　内容

人はなぜ（平面）格子点に惹かれるのだろうか? 評者も明確な答えを持ち合わせているわけではないが,「これ以上ないくらい具体的でわかりやすい対象」であるというのが理由の一つではないかと個人的に思っている. 方眼紙に多角形を描いて, その中の格子点をかぞえよう, という問題であれば, おそらく小学生でも興味を持ってくれるだろう. 全く予備知識のない子供と共有できる数学の問題というのはなかなかないが,「格子点」というのはそのような対象であると思う.

おそらく格子点が「これ以上ないくらい具体的でわかりやすい」ことと無関係ではないと思うが, 本書「格子からみえる数学」の内容は, 著者の高校生向けの数学講座の内容に基づいて加筆したものとのことである. 内容とレベルについて, 著者が「··· 高校生や大学 1 年生のみならず, 大学上級生や数学愛好家にも楽しめるものとしている. したがって高校生にはややレベルの高い内容もあるが, じっくり読んでいただければ十分理解できると思う」（本書はしがき）と述べているのは, おそらく高校生と実際に交流した体験に基づくことなのであろう. 本書は下記の 9 章からなり, それらは「格子点」というキーワードである程度つながっているものの, 各章が独立してそれぞれが豊富な内容を持っている. 内容をつかんでもらうために, 各章の題目を並べてみよう: 第 1 章「格子多角形の格子点数」, 第 2 章「基本三角形をめぐって」, 第 3 章「オイラーの公式」, 第 4 章「複素関数論とピックの公式」, 第 5 章「重み付き格子点の数え上げ」, 第 6 章「きれいな格子図形」, 第 7 章「ヤング盤」, 第 8 章「カタラン数とその一般化」, 第 9 章「折り紙の数学」.

各章がある程度独立していることもあり, また著者も述べている通り, 読者は興味を持った章から読み始めることができる. 予備知識や証明をつける／つけないなどの方針も章ごとに様々である. 例えば, 第 1 章と第 2 章は格子多角形の面積に関するピックの公式からはじまって, 多角形の格子点や連分数, ファレイ数列に関することが, （ほとんどの結果は）証明付きで紹介されている. 意欲のある高校生, 大学一年生, あたりの（高校数学は既知の）読者が, 初めて読む「数学書」としても手ごろだと思う. 一方, 第 4 章と第 5 章の内容をきっちり理解するには, 複素関数論の知識が必要である（知らないところを飛ばして, きっちり証明されている部分や結果を堪能するだけでも十分に面白いと思う）. 他の章でも証明の代わりに例の計算で済まされているところもある. 各章が高校生向けの講義であったということを考えると, 妥当なスタイルだと思われる.

2　新しい知見を取り込む

本書の一つの特徴は, 比較的最近の知見が多数盛り込まれている点であろう．できればそうしたいという思いは持っても,『専門外の人向けの講演』で『最新の知見を盛り込む』のはなかなか難しい．本書はその点で大変成功した例といえるのではないかと思う．もちろんこれは著者による「格子」というテーマ選択の良さであるが,「格子」というテーマが相反する二つの要求に対してうまくいった理由は主に二つ考えられる．

一つは, 格子点をめぐる数学が「トーリック多様体／トーリックトポロジー」という相棒を伝統的な代数幾何や位相幾何の中に持つことである．トーリック多様体は, 多面体や扇（fan）と呼ばれる組み合わせ論的構造に対して定義される代数多様体である．一般に代数多様体とは多項式で定義される図形のことである．多面体の組み合わせ論的構造とトーリック多様体の幾何学的構造の間に, 互いに翻訳可能な対応がある．代数多様体は代数幾何で古くから多くの研究があり, このことから, トーリック多様体を通して, 多面体の組み合わせ論的構造についても, 多くの新しい制約が見つかってきた．そしてそのような結果のなかには, 最近になって初等的な証明が見つかったものも多く, 本書の前半（1〜5 章）で紹介されている結果のいくつかは, そのような来歴を持つ結果である．

もう一つは, アメリカ数学協会（Mathematical Association of America）が発行する雑誌 “The American Mathematical Monthly”（以下 Monthly 誌）の存在であろう．本書の参考文献 46 件のうち, 7 つは Monthly 誌で発表された論文である．評者は Monthly 誌に関して詳しいわけではなく, いくつか論文を見たことがある, 程度の知識しかもっていないが, 初等的な話題に関する新しい結果や有名な結果に関する初等的な別証明など, 数学の専門家以外の学生や愛好家でも楽しめる内容の論文が数多く発表されている雑誌のようである．本書の内容のいくつかは, Monthly 誌を引用しており（例えば第 4 章は Diaz–Robins による Monthly 誌の論文内容紹介といってよいと思う）,「初等的な理解」に関する最新知見をうまく盛り込むのに成功していると思う．

3　本書を読んだ後に

高校生向けの講座に基づいた書かれている, という本書の性格からしてやむを得ない点ではあるのだが, 本書で扱われているテーマに興味を持ち, より本格的に学びたいと読者が感じた場合のために, 読後の指針となる文献への案内があれば尚よいと評者は感じている．例えば, トーリック多様体論に関して, 何度か触れられてはいるが, そもそもトーリック多様体論とは何なのか, ということに関しては説明や文献案内はない．また評者は第 9 章の折り紙について興味を持ったが, この章はほとんど文献を引用していないので, そもそもどういう文献があるのかわからない．（ただし文献案内が全くないわけではないということはコメントしておく．例えば第 7 章に関しては,「Fulton, Young tableaux に詳しく書かれている」というコメントがある．他のテーマについてもこのようなコメントがあるだけで役に立つ読者は多いだろう．また, 各結果の元となる論文の引用はよくなされておりこれも参考になる.）

本書に関連して, 評者が追加したい関連文献の筆頭は次のものである.

[BR] M. Beck, S. Robins, *Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra.* UTM Springer, New York, 2007. xviii+226

(「離散体積計算による組合せ数学入門（岡本吉央訳)」として 2010 年にシュプリンガー・ジャパンから, のちに丸善出版から, 邦訳が出版されている. 原著の方は, 2015 年に加筆された改訂版がでている.)

本書の前半（特に 1, 2, 4, 5 章）のエルハルト多項式に関係している部分は, [BR] と重なっている話題もあり, 本書に続いてエルハルト理論に入門するのに最適だと思う. 例えば三次元単体のエルハルト多項式のデデキント和を使った Pommersheim の表示（定理 1.20）や多面体内の格子点での多項式の値の和を積分とトッド作用素を使って記述する Khovanskii–Pukhlikov の公式（定理 5.12）は, 本書のレベルは超えるかもしれないが, トーリック幾何までは使わない初等的な証明が [BR] で紹介されている. （一方, 平面格子多角形に特化した話題に関しては, [BR] にない話題も本書には豊富に含まれていることを注意しておく）.

手短にまとめると, 本書は（平面）格子点に関する豊富な内容を持った好著であり, 意欲的な高校生から, 分野外の専門家まで, 「格子点」に興味を持つすべてに人にとって楽しめる本である. 著者のアウトリーチ活動（高校生向けの講座）に基づいているが, そこに比較的最近の研究が盛り込まれていることで, 格子をめぐる数学の最先端に触れることができる.