熊谷隆氏の Humboldt 賞受賞によせて

神戸大学理学研究科
梶野　直孝

1　はじめに：受賞によせて

京都大学数理解析研究所教授の熊谷隆氏が昨年 10 月に Humboldt 賞を受賞された．同賞はドイツの学術財団 Alexander von Humboldt Foundation が運営する大変権威ある賞である．熊谷氏にとっては昨秋の大阪科学賞に続いての受賞となったが，日本の確率論研究を長年に渡り牽引して来られた氏の業績が評価されこの度の受賞に至ったことは確率論のみならず日本の数学研究全体にとって大変喜ばしいことである．ここに心よりお祝い申し上げる．

熊谷氏のご専門はフラクタル（をはじめとする幾何学的に特異な空間）における確率過程および対応する熱拡散の解析である．当該分野の研究は，熊谷氏がまだ学生でいらっしゃった 1980 年代になされたいくつかの萌芽的な研究を契機として現在までに急速な進展を見せてきたが，氏はそのほとんど全ての段階で中心的な貢献を果たし続けている．本稿では熊谷氏の研究上の足跡に言及しつつ，進展の様子（のごく一部）を手短にまとめてみることにする．氏の一連の研究の位置付けを多くの方々にご理解いただく一助となれば幸いである．以下の解説にはやや専門的な内容も含まれるが，どうかご容赦いただきたい．

2　序章：臨界パーコレーションクラスター上の熱の劣拡散

フラクタル上の熱拡散の数学的に厳密な立場からの研究は，パーコレーションと呼ばれる古典的な浸透現象の物理モデルの，臨界点における挙動の研究にその起源を持つ．パーコレーションとは，d 次元整数格子 $\mathbb{Z}^d$ において 1 つ 1 つの辺を確率 $p \in [0,1]$ で残し確率 $1-p$ で除去する，という操作を各辺毎に独立に行って得られる $\mathbb{Z}^d$ のランダムな部分グラフ $\mathcal{G}_p$ のことである．$\mathcal{G}_p$ はパラメータ p の増大に伴い単調に増大するが，さらに次のように一種の「相転移」を示すことが知られている：ある $p_c(d) \in [0,1]$ が存在して，

(i) $p < p_c(d)$ ならば確率 1 で $\mathcal{G}_p$ は無限連結成分を持たず，

(ii) $p > p_c(d)$ ならば確率 1 で $\mathcal{G}_p$ はただ 1 つの無限連結成分 $\mathcal{C}_p$ を持つ．

$p_c(d)$ を臨界点もしくは臨界確率，(i), (ii) の状況をそれぞれ劣臨界的，優臨界的といい，また (ii) の状況を「パーコレーション（浸透）が起こる」ともいう．明らかに $p_c(1) = 1$ であり，一方 $d \geq 2$ に対しては $p_c(d) \in (0,1)$ であることが古典的に知られている．さらに Kesten (1980) による著名な結果として，$p_c(2) = 1/2$ であることも知られている．

パーコレーションは相転移現象の代表的なモデルとして数理物理学において古くから研究されており，$\mathcal{G}_p$ の連結成分やその上の熱の拡散が，特に臨界点 $p = p_c(d)$ において特異な（フラクタル的な）性質を示すらしいことが 1980 年代前半頃までに観察されてい

た．これを初めて数学の定理として定式化し証明したのが Kesten であった．Kesten は 1986 年の 2 本の論文において $d = 2$, $p = p_c(2) = 1/2$ の場合を考え，「$\mathcal{G}_p$ が無限連結成分 $\mathcal{C}_p$ を持つ」という条件付け [1] の下で，ある $\varepsilon > 0$ が存在して「$\mathcal{C}_p$ においては，時間 n の間に高々 $n^{1/2-\varepsilon}$ 程度の距離までしか熱が拡散しない（ランダムウォークが到達できない)」ことを証明した．$\mathbb{Z}^d$ においては時間 n の間に $n^{1/2}$ 程度の距離まで熱が拡散する（ランダムウォークが到達できる）ことを思い出すと，この Kesten の結果は「臨界パーコレーションの無限連結成分における熱の拡散は均質な媒質における熱の拡散よりも真に遅い」と表現でき，このような熱の拡散は**劣拡散的** (sub-diffusive) であるという．この Kesten の結果により，乱雑（あるいは，フラクタル的）な媒質における熱拡散の解析手法を確立するべきとの機運が高まり，次節以降で述べるフラクタル上の解析学の発展へと繋がることになる．

3　自己相似フラクタルにおける劣 Gauss 型熱核評価

上記の背景の下，まず Sierpiński gasket（以下 SG で表す）というフラクタルにおいて詳細な解析学が展開された．ここで（SG の場合だけに限らず，連続的なフラクタルにおける解析学で常に）最初に問題になるのは，熱拡散を記述する微分方程式，すなわち熱方程式

$$\partial u/\partial t = \Delta u \tag{1}$$

の右辺に現れる空間微分である「ラプラシアン」Δ を SG においてどのように定式化するべきか，という点である．これは確率論的には，SG 上に自然な拡散過程（標本路が連続，かつ強 Markov 的な確率過程）$\{X_t\}_{t\geq 0}$ をどう構成するべきか，という問題に相当する [2]．この問題は，SG の自然なグラフ近似列における単純ランダムウォークのスケール極限として $\{X_t\}_{t\geq 0}$ を得る，という形で Goldstein (1987), 楠岡 (1987), Barlow–Perkins (1988) により同時期に独立に解決され，その少し後にグラフ近似列上の離散ラプラシアンのスケール極限により直接 Δ を得るという解析的な形での解決も木上 (1989) により与えられた．このうち Barlow–Perkins (1988) は $\{X_t\}_{t\geq 0}$ の極めて詳細な解析をも同時に行った，フラクタル上の解析学の元祖とも言える記念碑的な論文である．特に，対応する熱核（熱方程式 (1) の基本解）$p_t(x,y)$ に対し彼らが示した次の評価

$$\frac{c_1}{V(x,t^{1/d_{\mathrm{w}}})}\exp\left(-\left(\frac{d(x,y)^{d_{\mathrm{w}}}}{c_2 t}\right)^{\frac{1}{d_{\mathrm{w}}-1}}\right) \leq p_t(x,y) \leq \frac{c_3}{V(x,t^{1/d_{\mathrm{w}}})}\exp\left(-\left(\frac{d(x,y)^{d_{\mathrm{w}}}}{c_4 t}\right)^{\frac{1}{d_{\mathrm{w}}-1}}\right) \tag{2}$$

[1] 実は $d = 2$ もしくは $d \geq 11$ で $p = p_c(d)$ の場合には $\mathcal{G}_p$ が無限連結成分を持つ確率は 0 であることが知られているため，「$\mathcal{G}_p$ が無限連結成分 $\mathcal{C}_p$ を持つ」という確率論的条件付けを厳密に正当化する（条件付けに対応する確率測度の存在を証明する）こと自体が非自明である．Kesten (1986) は $d = 2$ の場合にその証明も行っている．

[2] 拡散過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ は，$T_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(X_t)]$ により線型作用素の半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を定める（$\mathbb{E}_x$ は $X_0 = x$ の条件下での期待値を表す）．一定の仮定の下，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は適切な関数空間上の強連続半群となることが分かり，するとその生成作用素（$t = 0$ における時間微分）として「ラプラシアン」Δ が得られる．ここで $\{X_t\}_{t\geq 0}$ の標本路の連続性は Δ の局所性「U が開集合で $u|_U = v|_U$ ならば $\Delta u|_U = \Delta v|_U$」という形で Δ にも自然に反映される．

は熱核評価を中心とする以後の当該分野の研究の方向性を決定付ける極めて重要な結果であった．ここで ρ は Euclid 距離から自然に定まる SG 上の測地距離，$V(x,r)$ は中心 x, 半径 r の開球の（SG 上の自然な Hausdorff 測度に関する）測度であり，$d_{\mathrm{w}} = \log_2 5\,(>2)$ は SG の **walk 次元**と呼ばれる $\{X_t\}_{t\geq 0}$ の特性量である．$d_{\mathrm{w}} > 2$ に対する (2) は特に拡散過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ の劣拡散性を意味し，そこでこれを熱核の**劣 Gauss 型評価**という．

前置きが大変長くなってしまったが，ここでようやく熊谷氏のご登場となる．上記の Barlow–Perkins の論文が世に出て間もない 1989 年 4 月に京都大学理学研究科修士課程に進学された熊谷氏は，日本の確率論の研究者が多数この論文の解読を試みている中でいち早く読み終え，そのことで得た知見を基に独自の研究を開始された．当時，Lindstrøm (1990) により nested fractals と呼ばれる高い対称性を有する自己相似フラクタルにおける自然な拡散過程およびラプラシアンの構成がなされたところであり，この場合に劣 Gauss 型熱核評価を証明することは大きな問題となっていた．熊谷氏は 1993 年の論文で Barlow–Perkins の手法をさらに洗練することでこの問題を解決し，これが氏の博士学位論文となった．このときは熱核評価には Euclid 距離を用いていたが，翌 1994 年には Fitzsimmons, Hambly 両氏との共同研究で自然な測地距離を構成するとともに，各縮小像の縮小率が不均一であることを許す affine nested fractals という範疇のフラクタルへの拡張をも果たした．

氏はその後も熱核のさらに詳細な挙動の解析を推し進めて多数の興味深い結果を出しておられ，その中にはその後さらなる進展がほとんどないまま現在に至っているものも多い．比較的分かり易いと思われるものを 1 つだけご紹介すると，(2) を踏まえて氏は 1997 年の論文で（任意の）相異なる 2 点 x, y に対する $t^{\frac{1}{d_{\mathrm{w}}-1}} \log p_t(x,y)$ の $t \downarrow 0$ のときの漸近挙動を考え，SG においてはこれが周期的な振動を有し，特に $t \downarrow 0$ のとき収束しないことを証明した．この結果は，滑らかな空間における熱核に対し極めて広汎に成り立つことが知られている $\lim_{t\downarrow 0} 4t \log p_t(x,y) = -\rho(x,y)^2$ という漸近挙動（Varadhan 型漸近挙動；ρ は自然な測地距離）とは対極に位置し，フラクタル上の熱拡散の特異性を完全に計算し尽くした数少ない結果の 1 つである．この結果の拡張は野田 (2011) による SG に類似のフラクタルに対するもの以外は全くなされておらず，nested fractals などへの拡張は未解決のまま残されている．

4　劣 Gauss 型熱核評価の同値条件と安定性

自己相似フラクタルにおいて劣 Gauss 型熱核評価を確立する研究が一段落した 2000 年頃，今度は一般的な設定で劣 Gauss 型熱核評価を別の条件で特徴付ける研究が盛んになり始めた．この背景には滑らかな空間における熱方程式の研究の進展がある．滑らかな空間における Gauss 型熱核評価（$d_{\mathrm{w}} = 2$ に対する (2)）の特徴付けの研究は，Riemann 多様体上のラプラシアンに対して 1990 年代初頭に Grigor'yan, Saloff–Coste により解答が与えられ，これが 90 年代半ば頃に Sturm により抽象的な設定へと一般化されたことで最終的な解決を見ていた．ここで得られた特徴付けは「同心球の測度の比 $V(x,2r)/V(x,r)$ が有界」という**体積倍化条件** (VD), および各距離球上での（スケール不変な）**Poincaré 不等式** (PI) の成立という，測度やエネルギー汎関数の有界な摂動の下で不変な条件によ

り与えられており，特に「Gauss 型熱核評価が空間構造の有界摂動に対して安定である」という主張を含んでいる．そこで同様の結果を劣 Gauss 型熱核評価に対して証明することが重要な問題となっていた．

これはまずグラフ上のラプラシアンに対して Barlow–Bass (2004) により証明された後，Barlow–Bass–熊谷 (2006) により一般的な設定でも証明された．具体的には，上述の (VD) と (PI)（後者は d_{w} を含む適切な形に修正したもの）に，「エネルギーが一定以下に制御された cutoff 関数が存在する」（**Cutoff–Sobolev 不等式**, (CS)）[3] という（やはり有界摂動で不変な）条件を追加すれば，フラクタルを含む一般的な設定でも劣 Gauss 型熱核評価 (2) の特徴付けとなることが証明された．後者の論文（グラフに対しては Hambly–熊谷 (2004)）ではさらに，熱核評価 (2) が粗等長写像の下で保存されることも証明されており，これにより空間の微細構造の変化が大局的な (2) の成立に影響を与えないことも明らかになった．なお上記の研究の過程で (2) と（時空間のスケールに d_{w} を含む形の）**放物型 Harnack 不等式**が同値（従って同様の空間摂動で安定）であることも示され，非常に一般的な形で Barlow–熊谷–Grigor'yan (2012) にまとめられている．さらに Barlow–Murugan (2018) のごく最近の研究により**楕円型 Harnack 不等式**単独での摂動安定性も証明されている．

(CS) は摂動安定性を有するという点では有用だが直接証明することが極めて困難であり，そこで個々の具体例における (2) の成立を証明するのに有効な，直接確認し易い条件により (2) を特徴付ける研究も多数行われている．しかし熊谷氏ら多くの専門家による長年の努力にも拘わらず，理想的な条件の確立には未だ至っていない [4]．(CS) を同心球間の抵抗に関する簡単な評価に置き換えることができれば理想的なのだが，(2) のそのような形での特徴付けは $\int_0^1 V(x, t^{1/d_{\mathrm{w}}})^{-1}\,dt < \infty$ という意味で「低次元」の場合にしかできていない（熊谷 (2004), Barlow–Coulhon–熊谷 (2005), 木上 (2012)）．今後の更なる研究の進展が待たれる．

なお上述のような熱核評価成立のための都合のよい同値条件を与える研究は，拡散過程だけではなく飛躍型確率過程（標本路が不連続であるような確率過程であり，その生成作用素は非局所作用素になる）に対しても自然に考えられる．熊谷氏はここでも 2003 年頃から重要な研究成果を継続的に挙げ続けており，Z.-Q. Chen, J. Wang の両氏との最近の共同研究では，典型的な形の熱核の上下評価および放物型 Harnack 不等式が空間構造の有界摂動の下で安定であることを飛躍型確率過程に対しても証明するに至っている．

[3] 滑らかな空間においては，適切な Lipschitz 関数を cutoff 関数として用いることでこの条件は自動的に満たされることが容易に分かる．これに対しフラクタル的な設定では，単に Lipschitz 連続性や Hölder 連続性を課すだけではエネルギーの制御ができず有用な関数が得られない．この「距離とエネルギーの間の関係の悪さ」はフラクタルでは広汎に見られ，これが劣 Gauss 型熱核評価の研究に通常の解析学の手法を導入する妨げになっている．

[4] 他の既知の特徴付けは楕円型 Harnack 不等式を含み，その直接証明は (CS) ほど絶望的ではないが難しい．

5　そして原点へ：ランダム環境・乱雑媒質における熱核評価

フラクタルにおける熱核評価研究の進展により，元々の動機であった乱雑度の高い媒質における熱方程式の解析も 2000 年代半ば頃にようやく可能になった．最初の本質的な進展は Barlow (2004) によるもので，彼は $p > p_c(d)$（優臨界）の場合のパーコレーション $\mathcal{G}_p$ の無限連結成分 $\mathcal{C}_p$ 上のランダムウォークが，長時間挙動においては $d_{\mathrm{w}} = 2$ に対する (2) に類似の Gauss 型熱核評価を満たすことを示した．これは「優臨界相では $\mathcal{C}_p$ が大域的には $\mathbb{Z}^d$ に近い」という自然な推測を熱核の言葉で厳密に示したものといえる．また $\mathcal{C}_p$ 上のランダムウォークがスケール極限で $\mathbb{R}^d$ 上の Brown 運動に法則収束することもまもなく証明され (Sidoravicius–Sznitman (2004), Berger–Biskup (2007), Mathieu–Piatnitski (2007))，さらに $\mathbb{Z}^d$ の辺をランダムに除去する代わりに各辺の重み（抵抗値）をランダムにしたモデル (random conductance model) への拡張も熊谷氏を含む多くの研究者により行われている．

臨界点（$p = p_c(d)$ の場合のパーコレーションなど）における熱拡散の解析は媒質が真にフラクタル的になるため優臨界の場合よりも一層難しいが，多くのモデルにおいて熱の劣拡散性の定量化がなされている．この方面の最初の研究は Barlow–熊谷 (2006) による，各点における分岐数が一定値 $n_0 \geq 2$ の木グラフ上の臨界パーコレーションに対するもので，そこでは（$\mathbb{Z}^d$ の場合と同様に「原点 o を含む連結成分 $\mathcal{C}_o$ が無限集合」という条件付けの下）$\mathcal{C}_o$ 上のランダムウォークの walk 次元が $d_{\mathrm{w}} = 3$ であること，熱核（の，パーコレーションのランダムネスについての平均）が劣 Gauss 型評価 (2) を満たすこと，などが証明された．その後，（幾分弱い形の）同種の結果が d が十分大きい場合の $\mathbb{Z}^d$ 上の臨界パーコレーション (Kozma–Nachmias (2009)) をはじめとして多数のモデルで証明されている．さらには離散的な乱雑媒質のみならず，そのスケール極限として自然に現れるランダムフラクタルの上に自然な拡散過程を構成しその熱核評価を与える研究も，いくつかの重要な具体例に対して Croydon (2012), Barlow–Croydon–熊谷 (2017) によりなされている．ただしここでも満足な結果が得られているのは前節で述べたのと同様の意味で「低次元」の場合に限られ，そうでない例に対し (2) に類似の熱核評価を示していくことは今後の重要課題である．

6　おわりに

このように過去 30 年間のフラクタルおよび乱雑媒質上の解析学の進展は目覚ましく，熊谷氏がその中で果たしてきた役割は非常に大きなものであった．今後はどんな研究を披露して下さるのか，実に楽しみである．

なお以上の解説，特に 5 節では筆者の知識不足や紙数の都合もあり既存の研究のごく一部しかご紹介できなかった．詳細にご興味がおありの方には是非熊谷氏ご自身による講義録 [1] および論説記事 [2] を読まれることをお勧めする．

改めまして，熊谷先生，この度のご受賞，誠におめでとうございます．

参考文献

[1] T. Kumagai, *Random Walks on Disordered Media and their Scaling Limits*, Lecture Notes in Math., vol. 2101, Springer, 2014.

[2] 熊谷 隆「複雑な系の上の異常拡散現象の解析」,『数学』第 70 巻第 1 号 (2018), 81–100.