書　　評

小平邦彦が拓いた数学

上野健爾 著，岩波書店，2015 年

藤田　隆夫

この本のテーマは，書名にあるとおり「数学」です．小平師本人の文章やら自伝やらもある程度は取り上げられていますが，そうした面への週刊誌的興味で本書を手に取る読者がいるとすれば失望することになるでしょう．しかし，有名な解析曲面論や変形理論などを含む複素多様体論への通常の入門書たるべく書かれているわけでもありません．もちろん，そうした分野の基礎知識が十分でない読者への配慮はなされていますけど．

本書の構成は研究の発展をおおむね時系列的に追う形になっています．第１章「ワイルとの出会い」ではリーマン面の理論などワイルの理論の紹介の他にも１９５４年のフィールズ賞授賞式でのワイルのスピーチからの長めの引用があり，複素多様体論という研究分野の誕生のころの様子が描かれています．第２章「小平・ティチェマルシュの直交展開定理」では渡米してワイルに出会う前に得られたスツルム・リューヴィル問題に関する結果が紹介されています．第３章「調和積分論」では，初心者への配慮から微分多様体や複素多様体の定義から始まって，微分形式・リーマン計量・エルミート計量・ケーラー計量・調和形式・ホッジ分解などの事項について解説されています．第４章「調和積分論の発展と応用」では複素多様体上の因子や直線束についての基礎事項の解説のあと，複素曲面上でのリーマン・ロッホの定理に向けての小平の諸研究を紹介しています．ここはかなり丁寧に議論が進められていて，著者としてもかなり力の入った部分になっていますが，小平師本人が高次元への一般化も視野に必死に取り組んだ問題であったことの反映なのでしょう．多くの読者が御存知のとおり，リーマン・ロッホの定理はヒルツェブルフによって複素代数多様体に対し証明され，アティヤ・シンガー・グロタンディクたちによりさらに一般化されましたが，それをヒルツェブルフの有名な本で勉強する今日の数学徒は小平師のそうした努力に触れる機会は多分ほとんどない．そういう話題を重視したところに，本書の特色が現れている，と言えるでしょう．

第５章「層の理論」ではコホモロジー論を含む層の理論について解説し，複素多様体上の調和積分論との関連についても説明されています．その重要な応用例として，続く第６章「消滅定理と埋め込み定理」では有名なコホモロジー消滅定理が丁寧な証明つきで解説され，さらにその応用としてホッジ計量をもつ複素多様体は射影的であるという埋め込み定理が同様に丁寧に説明されています．第７章「複素多様体の変形

理論」では今日では小平・スペンサー理論と呼ばれることが多い複素構造の微小変形理論について解説されています．倉西理論やグラウエルトの理論，グロタンディクのスキーム理論などについても証明抜きではありますが関連性に言及されています. 最後の第８章「解析曲面の分類理論」では，曲面上の曲線の交点理論・リーマンロッホ定理・相対極小モデル・各種双有理不変量についての解説から始まって，代数次元に基づく複素解析曲面の分類の概要が説明されています. 曲面についての小平理論にはきわめて多くの素晴らしい結果が含まれていますが, 私にとって最も印象的なのは楕円曲面論，特に特異ファイバーの分類理論ですけど，本書では，小平師自身の論文が大変明快でわかりやすいので, 詳細はそれに譲り, 簡単に論文［K56］を見ておこう，というわけで，実際，特異ファイバーの細かい分類は省略されています．先行の諸章のような調子で丁寧に解説していると長くなり過ぎる，という事情もあるのかもしれません.

なお，小平邦彦全集に載っている論文は本書ではこの［K56］のように全集の論文番号を用いて引用されるのですが，評者には楕円曲面についてのあの論文だな，とわかるのでこれで十分なのですけど, 曲面論の専門家でない人が少しずぼらな気分で本書を手にした場合などにはちょっと戸惑うかもしれません．でも，原論文に当たって勉強する気のない読者には, [K56］のタイトルや掲載誌を記してみてもあまり意味はないから，これはこれでいいのかな.

あとがきに，本書作成の経緯について,「（前略）現代の到達した観点から小平先生の数学を見渡すことを考えていた．しかし，実際に書き始めてみると，それでは小平先生の数学の本質から外れてしまうことに気づき, 小平先生の研究の軌跡をたどり直すことに構成を改めた. それは思った以上に難しく，現代数学の進展をいやというほど痛感させられることともなった.」という記述があります．なるほど，そうだったのか. そこであらためて本書を見直してみると，著者の様々な工夫や苦労の跡が各所に見受けられるような気がします.

第３章と第４章は調和積分論への, 第５章と第６章は複素多様体上の層の理論への入門書としてもおかしくない内容で, 議論の進め方は初学者にも配慮した丁寧なものです. 第７章や第８章にもそうした性格はありますが，後世の進歩にも触れて現代的観点から俯瞰しようとする総合報告的な要素も見られます．ただしかし，第１章や第２章はもちろん，第３章以降にも，単なる入門書とは異なる志向が感じられます．著者のいう小平先生の数学の本質を伝えようとする意志の現われでしょうが, ではその本質とはどういうものなのでしょうか. 明白な形では述べられてはいませんが，本書の全体的構成から著者の考えを忖度してみましょう.

数学の理論を学習するに際し, 中心はやはり諸定理の証明を理解することになるでしょう．しかし，与えられた論証を辿ることができたら理解できたことになるのかな？一応そうして理解したとしても, それを応用し使いこなせるようになるのかしらん？小平邦彦という類まれな数学者の事蹟を本書によってあらためてふりかえって

みると,「わかる」という営為の本質は,数学のような普遍的な学問の場合でもきわめて個性的なものであり, そうした独自性へのこだわりが成果につながってゆくことが多いのではないか, と評者には思えます.

例えばリーマン・ロッホの定理. 第 4 章にあるように, 曲面上の結果に拡張するために, 直面する様々な問題をいろいろと工夫して乗り越えてゆき, 目標に迫っていった. 特に曲面上の曲線が特異点をもつ場合の考察が欠かせないのですが, 多くの方が御存知のとおり, 特異点が絡むと, 一見些細な技術的な課題に見えても実はしばしば本質的なややこしい問題が次から次へと出てくることも珍しくなく, 後世の人間には想像しづらい苦労や努力は並大抵のものではなかったでしょう. そこにヒルツェブルフの理論. 高峰をめざし, 一歩一歩と頂上に近づいてみると, ヘリポートができていて先着者がいた, というような気分でしょうか. これまでの努力は何だったのだろう, とがっかりしても不思議はないところですが, 小平師は, 層係数コホモロジー論という文明の利器の使い方をマスターし, 第 6 章の有名な消滅定理やその様々な応用を発展させていくわけです. 複素解析曲面についての諸論文がきわめて明快で読みやすいのには, 先述のリーマン・ロッホの定理に向けての努力が目に見えない形で働いているからではないか, と思えてなりません. 中でも, 楕円曲面論には, 並河靖之の七宝の名品の名人芸のような完成度の高さがあります. そうした優れた原論文へのガイドの役目も本書にはあるでしょう.

ともあれ, 小平流のわかり方の基礎は第 3 章にあるような調和積分論であり, そこに至る経緯も重要だ, として本書は構成されていると思われ, その見立てには評者も大いに賛同します.

ところで一方, 評者は,「わかり方」はひと様々, 百人いれば百とおりのわかり方があって良いのではないか, いや, むしろ, あるべきなのではないか, とも思います. コホモロジーの消滅定理を証明するのに, 解析学の深い結果に基づく調和積分論に頼るのは釈然としない, 正標数還元の技法を用いて代数的に証明してこそ正標数では消滅定理が元のままの形では成り立たない理由がわかるのではないか, というのも小平流とは真逆ですけど一つの考え方でしょう. そうした様々なわかり方の間に絶対的優劣はない. それらで得られる様々な描像が全体として合わさって数学という豊かな世界ができ, 人類文化の歩みに合流する. ですから読者も, 小平流を参考にしつつ, 自分なりのわかり方を追求すれば良いのではないでしょうか.