

# サーストンの3次元多様体論

早稲田大学理工学術院

小島 定吉

## 1 序

本稿は、2018年3月17日に東京大学で開催された筆者が表題のタイトルで講師を務めた市民講演会の報告記である。ちなみにもう一人の講師は新井仁之氏であった。

講演は、サーストンが1980年初頭に幾何化予想を含め一連の3次元多様体に関する問題群を提示し2012年にその全てが解決したことを踏まえ、彼の自己完結した3次元多様体論を紹介することを目標にした。ところが、話の組み立てを相当間違ったようで、主要な聴衆である一般の方からの質問はなく、講演会後に話した数人の懇意の方からも「私の理解を超えていた」という話があり、要するに失敗だった。一人目の新井氏の講演があまりに素晴らしかったので、二人目の筆者が聴衆の盛り上がった気分をすっかり台無しにしてしまったのではないかと、しばらく自己嫌悪に陥った。

ところで、市民講演会の講演者には数学通信に記事を書くことが連動しており、必然筆者にも市民講演会の講演者と確定した直後に依頼が来ていた。連動の趣旨は、市民講演会は数学会のハイレベルなアウトリーチ活動であることを前提として、当日出席しなかった会員に数学のアウトリーチ活動一般の「良き見本」となる講演内容を伝えることと想像している。しかし今回の私の場合は倣うべき見本ではなく、講演後本稿をどう書くかいろいろ考えて見たが、結局、いまさら失敗の言い訳しても仕方ないので、当日使ったスライドをそのまま掲載し批判を甘んじて受けたいと思うに至った。

## 2 市民講演会で用いたスライド

本章は、当日使ったパワーポイントファイルからアニメーション効果を除き、さらにタイポ等を修正した32ページのスライドを並べる。推敲の過程で、著作権関係に抵触する可能性のあるイメージを一つを削除した。また、筆者は4月に本記事に記す現職に異動したが、スライドでの所属は当時のままとした。

# サー斯顿の3次元多様体論

小島 定吉  
東京工業大学情報理工学院

## Pre Thurston

- ポアンカレの「位置解析」(1895-1904)
  - 本編と5編の補遺でトポロジーを創始
  - 最後の補遺で疑問を提起(1904)

基本群が自明な3次元単連結閉多様体は  
3次元球面に位相同型か？

## Pre Thurston

- ポアンカレ予想が導いたトポロジーにおける基本的な問題設定
  - 基本群の一般化であるホモトピー論が発展
  - 3次元の場合, 基本群が自明なら3次元球面にホモトピー同値

ホモトピー同値な閉多様体は位相同型か？

## Pre Thurston

- 連結和分解
  - 任意の球面が球体を囲む3次元多様体は既約
  - クネーザー(1929)とミルナー(1962)により

向きつけ可能3次元閉多様体は, 有限個の既約多様体または  $S^1 \times S^2$  の連結和に一意的に分解

## Pre Thurston

- ハーケン多様体の階層構造
  - 本質的埋込曲面を含む既約多様体をハーケン
  - ハーケン多様体は本質的埋込曲面に沿って切り開き球体の和に至る階層構造がある
  - ワルトハウゼン(1968)により

ハーケン多様体間のホモトピー同値写像は位相同型にホモトピック

## Pre Thurston

- トーラス分解
  - ザイフェルト束空間
  - ジェイコー・シャーレンとヨハンセン(1977)により

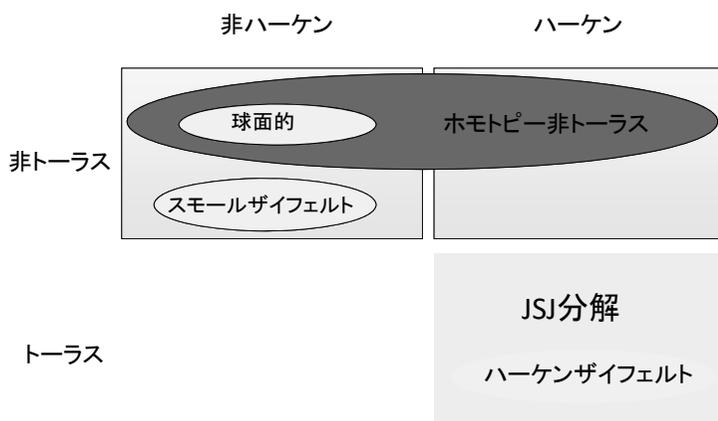
本質的埋込トーラスを含む既約多様体では、ザイフェルト束構造をもつ部分空間の位置はイソトピーを除いて一意的

# Pre Thurston

- JSJ理論の系

- ザイフェルト束部分空間の補空間では, 本質的埋込トーラスは境界にホモトピック(本質的トーラスを含まない場合を含め, この性質を非トーラス的という)
- 基本群が  $Z \times Z$  を含めば境界の基本群の部分群に共役であるときホモトピー非トーラス的という
- ホモトピー非トーラス的ならば非トーラス的
- 逆が成立しないザイフェルト束空間がありスモールと呼ばれている

# Pre Thurston



## Pre Thurston

- JSJ 後の基本的な課題
  - スモールザイフェルト束空間以外の基本群無限の非ハーケン多様体はあるか？
  - スモールザイフェルト束空間以外の非トーラス的多様体はどのような構造をもつか？ とくにホモトピー非トーラス的多様体はどうか？

## Thurston Era

- 8の字結び目のデーン手術
  - 8の字結び目の補空間は双曲理想正4面体二つを貼り合わせてできる
  - エンドの完備性を仮定せず4面体の構造を連続変形, デーン手術のスロープを連続的に拡張し, 完備化の特異集合を幾何的に解釈, とに有理スロープに沿う場合は結び目に沿う錐状の特異集合が生じる

## Thurston Era

- 8の字結び目のデーン手術の結果
  - 10個の例外を除き, ザイフェルトではない非ハーケン双曲多様体を得られる
    - 双曲多様体は至る所 $-1$ の定断面曲率をもつリーマン多様体
    - 双曲多様体はホモトピー非トーラス的

## Thurston Era

- デーン手術定理(1976?)

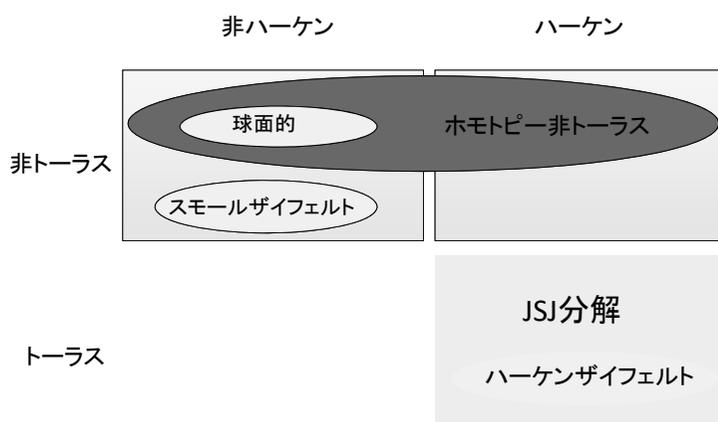
双曲結び目のデーン手術の結果には,  
有限個の場合を除くと双曲構造が入る

# Thurston Era

- ハーケン多様体に対する双曲化定理 (1976?)

任意のホモトピー非トーラス的ハーケン多様体には双曲構造が入る

# Pre Thurston



# Thurston Era



# Thurston Era

- Smith 予想の解決(1978?)
  - いくつかのアイデアが結集
    - シャーレンによる, サーストンのハーケン多様体に対する幾何化定理とバスによる表現の整性に関する結果を使った議論
    - ゴードン・リザラントによるミークス・ヤウによる極小曲面論による古典論の同変版を使った議論

# Thurston Era

- 幾何化予想（1980）

任意の3次元閉多様体の連結和分解さらにトーラス分解の後の各ピースには, 8種類のうちのいずれかの幾何構造が入る

# Thurston Era



# Thurston Era



# Thurston Era

- 仮想ファイバー予想 (1980)
  - 「任意の基本群が無限の3次元多様体は有限ハーケン被覆を持つ」というワルドハウゼンの予想に関連して

任意の3次元閉双曲多様体は円周上の曲面束となる有限被覆をもつ

## Post Thurston

- 幾何化予想はペレルマンが肯定的に解決 (2003)
- 仮想ファイバー予想はエイゴルが肯定的に解決 (2012)

## Post Thurston

- ハミルトンのリッチ流
  - 多様体のリーマン計量全体の空間上のフローで、以下のテンソルに関する方程式で定義される

$$\frac{dg}{dt} = -2\text{Ric}_g$$

ここで Ric はリッチテンソル

## Post Thurston

- ハミルトンの最初の仕事(1982)
  - $\text{Ric} > 0$  の場合に, リッチ流は時間大域解を持ち, スケーリングすると正定曲率に収束する
- この結果に対する注目度
  - サーストンは軌道体定理の証明の最後の部分にハミルトンの結果を使う
  - ヤウはハミルトンにリッチ流は幾何化予想の解に収束するのではと示唆する

## Post Thurston

- ハミルトンの幾何化予想解決プログラム
  - 崩壊および手術を経て求める計量に至る
  - 一般の計量からスタートする議論は未開発
- ペレルマンの仕事
  - 一般の計量からスタートしたときの崩壊現象が制御可能であることを示す
  - ハミルトンのプログラムを多少修正し, 手術を適切に定式化し幾何化予想解決を宣言(2002/3)

## Post Thurston

- ペレルマンの幾何化予想解決宣言は2006年には数学コミュニティーで認知された

幾何化予想は正しい

## Post Thurston

- ペレルマンの証明は
  - 一般次元のリッチ流の研究を促進
  - より一般に、偏微分方程式の解の爆発 (blow up) の研究にブレークスルを与え、偏微分方程式の専門家から高く評価されている

## Post Thurston

- エイゴルによる仮想ファイバー性判定条件
  - 部分群の分離性の一つとして剰余有限有理可解性を定義し、それが仮想ファイバー性の十分条件であることを示した(2008)
  - 直角アルティンの部分群は剰余有限有理可解
- 背景にワイズによるスペシャル群論
  - 「特別な」キューブ複体の基本群として定義
  - 直角アルティン群の部分群と特徴付けられる

## Post Thurston

- カーン・マルコビッチのブレイクスルー(2012)

任意の3次元閉双曲多様体はいくらでも測地的に近い擬フックス閉曲面を含む

## Post Thurston

- ベルゲロン・ワイズの観察(2012)
  - NPCキューブ複体への作用を壁系から関手的に構成する手法がサギーフにより整備(1997)

カーン・マルコビッチの結果から, 余コンパクトクライン群の3次元双曲空間への作用に対する(サギーフによる)壁系が得られる

## Post Thurston

- エイゴルの結果(2012)
  - ベルゲロン・ワイズにより構成された壁系の作用がスペシャルであること見出す

とくに, 仮想ファイバー予想は正しい.

## Post Thurston

- 実はより一般に

NPCキューブ複体に余コンパクトに作用する双曲群は仮想スペシャルである

- 純粹に幾何学的群論の命題で、次元の束縛はないが、証明にはサーストンのDehn手術のアイデアが生きている

## まとめ

- サーストンは1970年半ばから3次元多様体論の研究を加速した
- 1982年に発表した3次元多様体のトポロジーに関する二つの基本的問題はその後の研究活動を牽引した
- 二つの基本問題は予期せぬ方法で解決され、しかも各々独自の発展に結びついている