ことばとしての数学：

楕円関数の源流としての弾性曲線論から学ぶこと

松谷　茂樹　(金沢大学電子情報通信学系)

概　　要

数学には，人類の未踏の知を極めることを一つの目的とし，有用性から遠くあるほど崇高であるとする一面があります．それに対して，楕円関数論を完成させたワイエルシュトラスの弟子であった哲学者フッサールは，幾何学の起源について「幾何学は測量技術者の言葉を極限操作したものである」としました．あまり知られていないことですが，整数論や代数幾何をはじめとした現代数学全般に影響を与えている楕円関数や楕円曲線の起源も，建築物の梁の形状を記述するためにベルヌーイやオイラーらが行った弾性曲線の研究でした．講演では彼らが数学をどのように発展させ，利用したかを概観しました．本報告では，それらを示した後に，楕円関数の萌芽に言葉としての数学の在り方を探り，歴史に学ぶことで指針を提示し，その指針に沿った数学の応用を具体例と共に紹介します．数学はすでに現代技術において重要な位置を占め，これからも大きな役割を担うことが約束されています．これらの視点から「ことばとしての数学」の在り方の一つを提案します．

1. 導入

数学には，人類の未踏の知を極めることを一つの目的とし，有用性から遠くあるほど崇高であるとする一面があります．

それに対して，楕円関数論を完成させたワイエルシュトラスの弟子であった哲学者フッサールは，「幾何学は測量技術者の言葉を極限操作したものである」として幾何学の起源を提示しました [S]．あまり知られていないことですが，整数論や代数幾何をはじめとする現代数学全般に影響を与えている楕円関数や楕円曲線の起源も，建築物の梁の形状を記述するためにベルヌーイやオイラーらが行った弾性曲線の研究でした．

これらの数学は，科学者や技術者が使っている言葉を，次世代に残すために標準化し，洗練・純化したものです．純化によりどの科学やどの技術にも適用できるようになり，ユニバーサルな言葉として進化してきました．使われることを前提とした道具としての数学であり，人類の財産としての数学です．

レオナルド・ダ・ヴィンチは「工学は数学的科学の楽園である．なんとなればここでは数学の果実が実るから」[dV] と述べました．近年，様々な技術が高度化し，20 世紀は物理の世紀であったのに対して，21 世紀は数学の世紀であるとも言われるようになりました．21 世紀の科学・技術には 21 世紀の数学が必要となってきています．正に「ことばとしての数学」が世界を記述すべき時代となっています．

その際「ことばとしての数学はどのようにあるべきか？」という問いはとても深淵です．その問いに答え，数学を使いこなすためにどうするべきか，社会とどのように対峙すべきかを，我々は考える局面に今立っています．

2019 年度秋季総合分科会市民講演会（9 月 16 日）
This work was supported by KAKENHI（19K02871）．

私はキヤノン株式会社で27年間，数理解析の業務に従事しました．後半の10年間は管理職として現場でその方向性を探ってきました．それと併行して勤務時間外に在野研究者として，楕円関数論の一般化である代数曲線に関わるアーベル関数論の研究を推進してきました．

金沢で開かれた「市民講演会」では，ベルヌーイ，オイラー達が弾性曲線を記述するために数学をどのように発展させ，利用したかを概観しました [M3, M5, M7, Tr]．楕円関数の萌芽に言葉としての数学の在り方を探り，歴史に学ぶことで今後進むべき指針を提示しました．この指針に沿った数学の応用を私は先進数理解析と呼んでいます．講演では私が関わってきた先進数理解析の事例として，特異点論とインクジェットプリンター，擬等角写像・点過程とナノ材料，初等整数論と結晶転位・光学現象，グラフの ζ 関数とグラファイト材料，量子ウォークと色材などを紹介しました．

本報告では講演での内容を概括的に示すことにします．

数学はすでに現代技術において重要な位置を占めており，これからも更に大きな役割を担うことが約束されています [M2, M6]．21 世紀の変革のときに,「ことばとしての数学」の在り方について一つの指針を示したいと思います．

2. 21 世紀の危機

21 世紀に入って，産業構造が大きく変化しています．ある種の産業革命の中にあるといっても過言でありません．製造業に関わる企業に居た立場から見ると，日本は危機的な状況です [M2]．社会全体の問題としてこの危機を認識し，社会全体で立ち向かわなければ，日本の存在自身を揺るがしかねない状況であると認識しています．実際，2000 年以降の電気機器の貿易収支も国家予算にも関わるオーダーの数値で変貌しており，社会の構造は大きく変化しています．社会は変革の時代を迎えているのです．端的に表現すると，アカデミアにも大きく関わる危機的な状況であることを意味しています．国家予算の使い道の問題だけではなく，国家予算そのものが半減しかねない状況にあるということです．

この状況を前に，私は数理物理，応用数学，純粋数学の研究者として，また企業の現場の経験者として，

1. 数学はどう役に立っているのか？
2. 数学はどう社会と向き合うべきか？
3. 社会は如何に数学と向き合うべきか？

という問いの答を模索してきました，企業の研究者時代よりいくつかの書を著し [M1, M6, N2, N3]，更に 2015 年に企業を辞し，主たる研究の傍らでこのテーマについて発信をしてきました [M2, M8, M9, M10, M11].

3. 技術と数学

「技術と数学」という組み合わせには戸惑いを感じるのが自然であるように思います．しかし，数学者と数学利用者が分岐する 19 世紀中盤以前は，偉大な数学者はみな偉大な科学者であり，偉大な科学者は偉大な技術者でもありました．例えば，オイラーが発見した水車のリンク構造は水力発電に使われました．

また，ガウスは算術研究において連分数にガウスの括弧を導入して２次体の研究をしましたが，そのガウスの括弧を利用して光学のレンズの設計方法も提示しました．それらは，数学的には $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ と $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の対応と見ることができます．すなわち，ガウスは光学を通してシンプレクテック構造の基本を見抜いていたということです [N3]．また，ガウスは「ガウスの和」の研究を行っていた際に，巡回群の群環構造を見抜いてそれを天文の軌道計算に応用し，高速フーリエ変換を発見，活用しました [M1]．

ところが19世紀後半から，数学の発展に伴い，様々な困難が露呈するようになりました．数学の発展は数学者が担うようになり，数学者が数学利用者である科学者・技術者を兼ねることは極めて稀となっていきました．

困難のいくつかは次に述べる楕円関数の一般化の流れの中で顕在化したものです．それらを乗り越えるためにそれまでのおおらかな考察手法を改め，より厳密なアプローチを求めるようになりました．例えば，ワィエルシュトラスは解析学の算術化というアプローチの中でコーシーの $\varepsilon-\delta$ 手法を厳密化しました．また，厳密化に伴った集合論やイデアル論などの新たな数学の出現により，従来の実数，整数，不変式などの数学概念は全く新たな見地から再考され，充分な訓練を経た数学専門家でなければ厳密に取り扱うことができなくなりました．それに伴い，数学を利用する科学者・技術者がその時代の先端の数学を理解することも容易ではなくなりました．

19世紀末から20世紀のこうした劇的な変化は物理学などにおいても起こりました．物理学では熱力学，電磁気学，相対論，量子力学などの新しい学問分野が生まれた時代でもありました．それらの発展を支える数学を数学利用者に向け提示しようと「クーラン・ヒルベルト」として知られている「数理物理学の方法」[CH] の独語版が1924年に出版され，日本でも寺澤寛一の「自然科学者のための数学概論」[Te2] の初版が1931年に出版されました．

クーランがヒルベルトの名の下に「数理物理学の方法」を出版した背景には、ヒルベルトの高校時代からの畏友であるミンコフスキーがいました [R2, N1]．

ミンコフスキーは19世紀末から発展した物理学の諸学を記述する数学の構築を目指し，1900年の第2回国際数学者会議における講演でヒルベルトが提示した23の問題に「物理学の公理化」を含めることを提案し，1902年以降はヒルベルトと共にその研究を推進しました.（ミンコフスキー空間がアインシュタインの特殊相対論の発見の直後に提唱されたのは，既にその準備ができていたからと見るべきです.）ミンコフスキーが早世したため，ヒルベルトはミンコフスキーの意志を継ぎその研究を継続しました．

出版社からの要請を受け，クーランがヒルベルトの講義ノートやヒルベルトから学んだことを基に執筆したのが「数理物理学の方法」でした [R1]．

他方，日本でも寺澤寛一が，欧州での勉学を終え，岩波講座「物理学及び化学」において「物理学に応用する数学」を執筆しました [Te1]．1930年前後の事です．それはその後「数学概論」[Te2] となりました[1]．その緒言では「ファラデーの明あらばマックスヱルの数式なきも電気の学問が進歩し得るのである.」として，数学がなくとも学問を推進できる偉大な科学者がいると述べる一方,「凡庸は数学の力でも借りて自然科学の開初に努め以て之をあやまらないやうに築き上げねばなるまい.」として，数学を言葉として操ることの必要性と，書を著した所以が書かれました.「数学概論」の緒言で

[1] 一松信先生に教えて頂きました [M11]

も，数学書について「欧米諸国においては既に幾多の良書あって，適当な材料を選択して自然科学者のために供給しその研鑽を助けつつある」として，数学専門家ではない科学者に向けた数学書を和書として出版した狙いが書かれています.

ミンコフスキー，ヒルベルト，クーラント，寺澤に共通した動機は，人類や社会（あるいは日本）全体の発展のためには「数学を活用できるようにする」という大きな使命感でした．数学が全科学の礎であるという誇りでもありました．そのような誇りと使命感の下，著された書により，20 世紀の科学・技術は発展することができたのです.

しかし，それらの書が出版されてほぼ 1 世紀が過ぎました．科学・技術も，20 世紀終盤から大きく変貌しています．[CH] や [Te2] に記載されている数学だけでは科学・技術を表せなくなってきています[2].

「数学と技術の関係はどのようにあるべきか？」「如何に数学を活用するのか？」まず，温故知新として，楕円関数の源流を探りたいと思います.

4. 楕円関数の源流としての弾性曲線論から学ぶこと

楕円関数論を完成させたワィエルシュトラスの弟子であった哲学者フッサールは，幾何学の起源について「幾何学は測量技術者の言葉を極限操作したものである」としました.「幾何学的対象の発生源は「自然」の中にあるわけではなく,「技術」という行為の中にある」[S, p.219] と捉えていました.

例えば，楕円関数・楕円曲線は，様々な数学分野の深い定理に関係しており，現代においても様々な数学の問題の源泉です．楕円関数の萌芽は代数的な曲線であるレムニスケートにあると言われてます．しかし，それらの萌芽自身は実は技術的な梁の曲げの問題に結びついているのです．梁の曲げの問題とはレオナルド・ダ・ヴィンチ，ガリレイらから始まり，ライプニッツやホイゲンス，ヤコブ・ベルヌーイが論争をし，ヤコブ・ベルヌーイ，ヨハン・ベルヌーイ，ダニエル・ベルヌーイ，オイラー達が発展させ，解決した問題です [M3, M5, M7, M8, Tr].

ヤコブ・ベルヌーイは 1691 年に「平面上の細い弾性棒の形状は如何に表現されるか?」という問題を提示しました. ヤコブは細い弾性棒をエラスティカ (elastica) と名付けました. 日本では弾性曲線と呼びます.

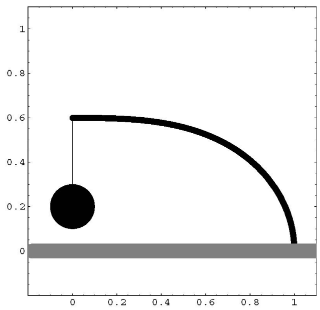

図 1 ：弾性曲線の形状

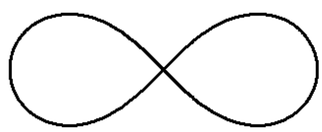
図 2 :レムニスケート

この弾性曲線とはピアノ線やギターの弦の形状を思い浮かべればよいものです．ギターの弦（ストリング）といっても，素粒子論のストリング理論とは全く関係ありま

[2] 静岡大学に赴任された中原幹夫先生が [NS] のオリジナル版を執筆されているときに修士時代を過ごし，執筆の簡単なお手伝いをしていたことも，このような考えに至った理由のひとつです．その経験も踏まえ，科学者・技術者が現代数学に触れ，他方，数学者が科学や技術と現代数学との関係を概観する一助になればと，私の能力の範囲で執筆したものが [M1] です．応用を目的とした数学書と言えば「身のかわし方」のような how-to 本がもてはやされますが，列挙されたそのような方法を幾ら学んでも現場の問題はその範疇に収まりません．基本的な考え方を学ぶ方が遥かに重要なのです．[M1] は数学利用者が数学書に直接触れる際の基礎を習得することを意識して書いたものです.

せん．現実の弦は等長変形という性質のために，量子化しなくとも，つまり古典的なレベルでも，とても豊かで深い数学と繋がります．

弾性曲線はしならせた竹の形状やたわませた紙やカーペットの形状でもあり，ケーブルなどの形状でもあります．例えば，プリンターや印刷機などでは紙の搬送の際，紙のたわみを制御せねばなりません．弾性曲線は現在も産業的に重要な問題です．

ヤコブは3年間の研究の後，弾性棒に働く力が曲率kに比例する事と，図1に示したような形状の弧長sとそのY軸方向の高さが

$$s=\int_0^X \frac{dX}{\sqrt{1-X^4}}, \quad Y=\int_0^X \frac{X^2dX}{\sqrt{1-X^4}}$$

で記述される事とを発見し1964年に公表しました．積分は所謂レムニスケート積分です．[B]によるとヤコブは弾性曲線と共に，ライプニッツが提案した問題であるパラセントリック曲線の問題も同時に解決しました．そしてその過程でレムニスケート曲線$(X^2-Y^2)=(X^2+Y^2)^2$を発見しました．そのため，上記の積分はレムニスケート積分として知られ，ファニャーノらに引き継がれるのです．

ヤコブ・ベルヌーイが提出した問題は，その後次世代のダニエル・ベルヌーイとオイラーに引き継がれました．

kを弾性曲線の曲率とします．ダニエル・ベルヌーイは弾性曲線の形状がそのエネルギー$\int k^2 ds$を最小化するものとして実現される事を発見し，1738年にオイラーに手紙を書きました．この最小原理の発見は，光学でのフェルマーの光路長の最小原理が力学系へ拡張されるという深い意味を持つものです[Tr]．

このエネルギーは現代数学の用語を使うと，最も単純な「調和写像」ということになります．

オイラーはダニエルの発見を基に1744年に変分法を構築し,「方法」という名の書籍を出版しました．いわゆる，オイラーの変分法です．その付録において，この変分法を弾性曲線問題に適用し，図3に示すようにその形状を完全に分類しました．

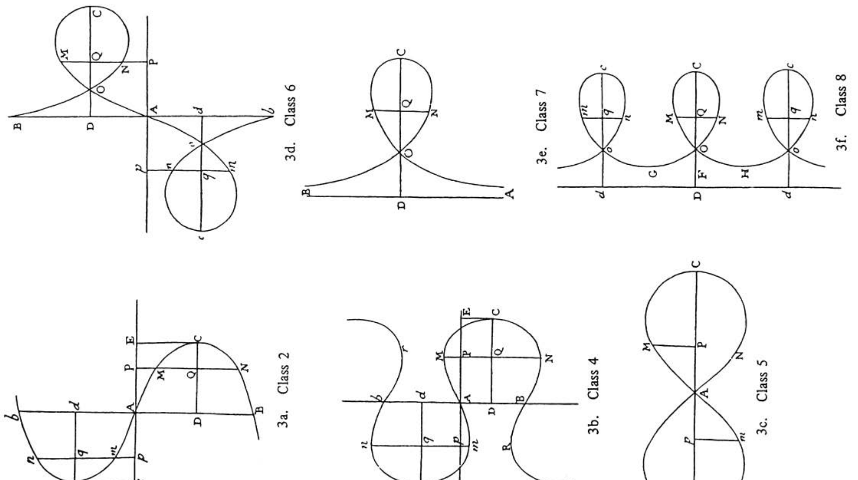

図3：弾性曲線の全形状（円，直線，図1を除く）

オイラーの計算結果は現代数学の視点から見ても興味深いものです．今もこの延長線の仕事が多くなされています．実際オイラーの結果の図3の図形そのものや少し変形したものが，今も論文として出版され続けているのです．

オイラーは弧長の長さを保存する制限の中での変分法を弾性曲線に適用し，弧長sとそのY軸方向の高さが

$$s=\int^X \frac{\lambda^2 dX}{\sqrt{\lambda^4-(\alpha+\beta X+\gamma X^2)^2}},\quad Y=\int^X \frac{(\alpha+\beta X+\gamma X^2)dX}{\sqrt{\lambda^4-(\alpha+\beta X+\gamma X^2)^2}}.$$

という形で記述される事実を提示しました．$\alpha,\beta,\gamma,\lambda$は定数です．第一種楕円積分と第二種楕円積分です．第一種楕円積分の逆関数が楕円関数と呼ばれるものです [M3, M5, M7].

オイラーの結果を現代的にワィエルシュトラスのζ関数, $\wp$関数を使って書くと

$$X(s)+\sqrt{-1}Y(s)=\zeta(s)+es,\quad X(s)=\alpha_0\sqrt{\wp(s+s_0)-e_1}+c$$

とも書けます．楕円関数$\sqrt{\wp(s+s_0)-e_1}$と楕円関数の積分である$\zeta(s)$の実数部とがこのように対応することはとても不思議な現象です．ここでs_0，c, α_0は定数です．

更に，オイラーは楕円曲線，正確には楕円関数のパラメータaやbなどのパラメータ空間の幾何学を研究しました．モデュライの研究です．エラスティカの実性から，この次元は実 1 次元である事が判ります.

楕円関数の萌芽は，ファニャーノがレムニスケート積分の加法性についての研究を行い，それをオイラーが発展させたところにあると知られています．しかし，オイラーが，ファニャーノの結果を知る 1751 年より前に楕円積分やその幾何学を既に深く理解していたということはとても重要だと思います[3].

曲線の弧長パラメータsにとっての座標$X(s)$は，楕円積分の逆関数である楕円関数です．$Y(s)$座標の擬周期性はθ関数の擬周期性でもあります．ガウスやアーベル，ヤコビが見つけた楕円関数やθ関数を，オイラーが既に発見していたと主張するつもりはありません．それでもオイラーが描いたものの中にその萌芽が既に存在したというのは特筆すべき事実です.

楕円曲線，モデュライ，楕円関数の故郷としてレムニスケートがよく話題に挙がりますが，このように，その起源に技術を源とする問題が関わっていた事はとても興味深いことです.

梁の曲げをスケッチをしたダ・ヴィンチは手記の中で「工学は数学的科学の楽園である．何となればここでは数学の果実が実るから.」[dV] と述べています．フッサールの指摘は，師ワィエルシュトラスがこよなく愛した楕円関数も工学に関わる問題と無縁ではないことを示しているのです [S].

これらの研究から学ぶべきこととして

0 対象の（物理的）本質を理解する.

1 問題を解く際には手段を選んではならない．言葉がなければ創ってでも表現する.

2 繊細な数学的事実を決して蔑ろにしない.

---

[3] もちろん，楕円関数論から始まるアーベル関数論の深みは，超越的とされる積分の中（つまりヤコビ多様体）に代数的な性質が反映されるという，超越性と代数性の融合にあります．その意味で，数学史の中ではファニャーノの結果に重きを置いてきたこともまたとても自然なのです.

という精神が読み取れます．0としたのは，これが数学外の話だからです．数学者としてだけではなく，偉大な科学者，技術者としての深い考察がなければ，数学活用はあり得ないことを弾性曲線の研究は物語っています.（数学モデル化においては，前提条件として，数学以外の専門による，数学以外の対象とした深い洞察が必要だということです.）そのうえで，対象とした科学的・技術的課題にとって，最適な言葉（数学）を選ぶことが重要です．最適な数学でなければ対象を的確に表現することはできません．よい言葉がなければ，創ってでも表現するという強い意志も必要です．その際，例えば，楕円関数を三角関数で近似するなどというひ弱で稚拙な手段を選んではいけません．繊細な数学構造をていねいに，かつ的確に取り扱うことがとても大事なのです．これを先進数理解析と呼んでいます.

5. 先進数理解析の例

私は素粒子論の修士を終えてキヤノン（株）に入社し，27年間，技術者として過ごしました [M2]．入社後すぐに自分の実力不足に気づき，横浜国立大学などに通いながら[4]純粋数学を学び，2000年頃からは純粋数学の論文を書き，それらが出版されるようになりました.

自宅で研究をしていたのが，次に述べる弾性曲線の統計力学です．これを足がかりに代数曲線のアーベル関数論の研究に軸足を移しました．こうした自宅での研究を推進するには，会社では効率的に働き，時間を有効活用することが欠かせません．勤務時間は熱意をもって業務に集中し，自宅では勉強と研究に励みました．そうして純粋数学の研究を続けていると，いつしか技術者である私の脳の中に純粋数学者が住むという，稀有な体験をするようになりました.

このようにして私は図らずも，

1. 数学者が脳内に住む技術者に現場の技術はどう見えるのか？
2. オイラーの弾性曲線の研究という優良なひな型を知った技術者は，数学をどのように取り扱おうとするのか？

という問いに，僅かながらの答えを持つに至りました.

技術者（非数学者）の間では「数学は確かにすごいのだけれど，現実は数学のようにはうまくはゆかないものだ」という発言をよく見聞きします．しかし，それは彼らの多くが現代的な数学を知らないだけという印象があります．工業数学や物理数学のみで表現できるほど，21世紀の技術者の扱っている「現実」は単純ではありません [M2].

現代数学が役に立った例を挙げてみたいと思います.

5.1. DNA の形状と弾性曲線の統計力学：　アーベル関数論への飛翔

DNA の超らせん形状を数学的に表現しようと考えると，最小作用だけではなく，オイラー・ベルヌーイ汎関数 E と温度 $1/\beta$ によるボルツマン重み $\mathrm{e}^{-\beta E}$ による統計力学を構築することが自然な方向性のひとつであるという事に辿り着きます．その構築のためには，通常，代数的位相幾何で考えるループ空間を距離空間の圏で考えることに導かれます．そこで，私は複素平面内の円 S^1 の等長埋め込みのモデュライ空間を理解することを出発点としました [M3, M5, M8].

---

[4] 詳しくは [M2] にあります．様々な方々に支えられて現在の私があります.

弾性曲線は楕円関数や楕円曲線の知見によって完全に記述されますが，それと同レベルの明確さで超楕円関数や超楕円曲線，超楕円曲線のモデュライ構造が判っていれば，等長埋め込みのモデュライ空間の幾何構造を始めとする弾性曲線の統計力学の多くの問題が解決されることは比較的簡単に判ります．しかし，超楕円関数や超楕円曲線に関する理論は，楕円関数論（より正確に言えば，ワイエルシュトラスの楕円関数論）ほど，具体性をもって構築されているわけではありませんでした．

弾性曲線の統計力学の形式的表示

$$\mathcal{Z}[\beta] = \int_{\mathbb{M}} DZ \exp\left(-\beta \oint k_Z^2 ds\right)$$

k_Z: 曲線 Z の曲率,
$\mathcal{M} := \{Z : S^1 \hookrightarrow \mathbb{C} |$ 等長, 解析的$\}$,
$\mathbb{M} := \mathcal{M}/\sim$, $\sim$:ユークリッドムーブ.

そこで私は「超楕円関数を含むアーベル関数論の再構築」から始めようと決意をし，20年来，その研究を推進しています [M8, M14].

5.2. インクジェットプリンターのインク吐出部の流体モデル化

キヤノンのインクジェット・プリンターは，インクの吐出部にあるヒーターに電流パルスを流すことで，ヒーター周りの液体のインクを気体に相変化させ，その密度差によってインクを吐出させる原理を利用しています．そのため，ヒーターの近傍では，固体，気体，液体の三相を取り扱う必要が生じます．三相の交わる箇所は三相界面と呼ばれます．この三相界面を取り扱う流体の数学モデルを構築することが，2000年前後の大きな課題でした．現在は市販の流体シミュレータでもこれらを取り扱うことができますが，当時はそのような数学モデルは論文レベルでもありませんでした．これを最も単純な特異点として取り扱うことで数学モデル化したものが [MNS, M6] です．2000年頃，当時上司であった故浅井朗氏が物理的な考察により提示した定式化を，数学的に再定式化し，その式が由緒正しいものであることを示し，その基礎付け・一般化を行いました．それを2011年になって公開したのが [MNS] です．

様々な理由から，フェーズ場理論の枠組みで三相界面での界面張力を最小原理に従って定式化する必要がありました．その際，エネルギーの評価に，特異点論で行われている $V_0 \subset V_1 \subset V_2$ という階層構造を利用しました．ちょうど自宅で代数曲線のヤコビ多様体の階層性の勉強をしていたので，そのようなアイデアが利用できたのです．

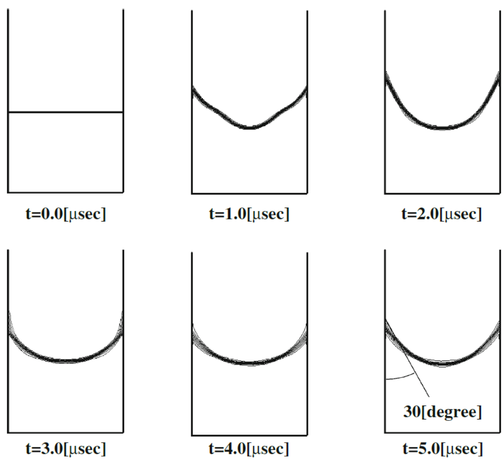

図４：メニスカス運動の再現 [MNS]

[M6] でも述べましたが，産業現場では従来の工業数学のみでは表現できない現象と対峙しています．そうした困難が克服され，課題がまさに解決される場という意味で，産業の現場はとてもエキサイティングな場です [5]．数学の重要性は21世紀に入って計り知れないほど大

[5] 企業の開発現場の研究の多くは論文になりませんが，論文にならないことは研究者のモチベーションをなんら落とすものではありません．新たな技術の創出に向け，有能な技術者が集まり議論を行うこ

きいのです．それが競争の源泉となることにもなります．

5.3. ナノ材料の材料設計に向けたパーコレション理論を活用した数学モデル化

これは2000年代に取り組んだもので，複写機などで利用される複合材料の設計に関わります[MSW, MSh2, M6]．ナノテクノロジーの一環として，カーボン・ナノ微粒子を樹脂の中に埋め込むことで電気伝導度を制御する設計指針を，数学の知見を活用して提示したものです．これはパーコレーション理論を基礎としています．パーコレーション理論では，通常，連結する確率を取り扱うのに対して，実際の問題では，連結しているとは限らない複数の微粒子を含有した系で定義された広義の調和関数を取り扱う必要があります．これらは解析学や確率論などの複数の分野がクロスオーバーするため，数学の各分野の中では十分な検討がなされていませんでした．

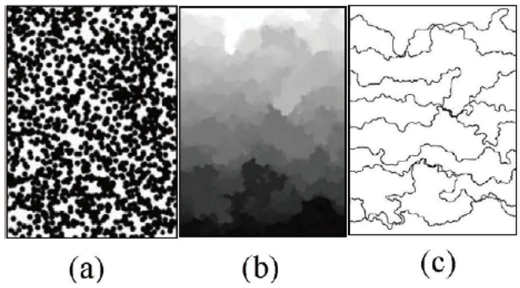

図５：パーコレーション上の電気伝導[M6]

そこで数値解を基に，確率論や擬等角写像の知見を援用し考察することで，複合材料の設計指針を提示しました．そこでは,「フラクタル構造を持つ境界条件の下で調和関数（複素解析関数）はどのように定義されるか？」など本質的な問題とも対峙しなければなりません．更に設計指針として現場に提示するためには，数学的な知見を現場の視点（仕様や材料の制約）で再解釈することが求められるのです．

5.4. ホモロジー代数を利用した適合細分化格子の構成方法

計算機の中で数値シミュレーションを実際に行うためには，プログラミングできるアルゴリズムのレベルに落とし込まなければなりません．例えば，計算機上で複雑形状を表現するためには，適切な格子の構成が必要となります．実際の素子の形状は複雑です．有限要素で知られている形状に沿った４面体型の格子よりも６面体型の細分化格子の方が，複雑な形状を表現できることが知られています．６面体型の細分化格子を形状に沿って適切に構成するのは難しいものですが，ホモロジー代数の知識を援用すればシンプルな構成方法のアルゴリズムを提供できます．丁度，大学でも特許化の動きのある時期でしたので，このようなアルゴリズムは，権利行使のためというより利用を保証するために特許として権利化しました[M4][6]

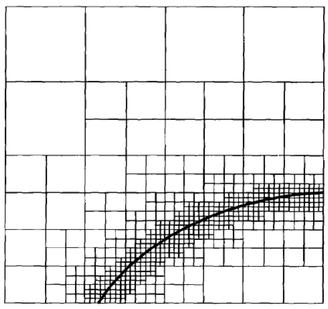
図６：適合細分化格子による形状表現

とは，少し誇張気味かもしれませんが，論文により個人の名声が高まることより遥かに深くモチベーションを上げるものです．つまり，論文になる，ならないは大きなファクターではありません．企業の現場とはそういう場です．そういう現場の（数理も含めた）面白さや学問としての深みが世の中に知られていないように感じるため，喧伝の意味もこめて，私は発信をしています．

[6] 2007年頃からキヤノンでは公開した特許出願内容や権利化したものが不当に利用される事を防ぐために，特許出願自身が制限され，ノウハウとなるキーテクノロジーは公証役場などを利用した「先使用権の確保」が基本となりました．そのため，その後は多くのアルゴリズムに関わる研究内容が機密で非公開となりました．

5.5. 電子顕微鏡写真のモルホルジー（凝集度合い）の数値化

空理空論ではなく現実を反映した数値シミュレーションを行うためには，実験データからの特徴量・物理量の抽出は必須です．技術の発展に伴い観測される現象自体が近年大きく変貌しています．それらの特徴を表現する数学も時代に対応したものでなければなりません．特に，形状などの幾何構造や物理的機構が関係する実験データは，単純な統計学の枠組みに収まることはありません．複合材料の場合は，素材の形状パラメーター（モルホルジーの一種）を抽出しなければ実験データの有効活用はできません．つまり，幾何学と統計学の融合が必要となります．

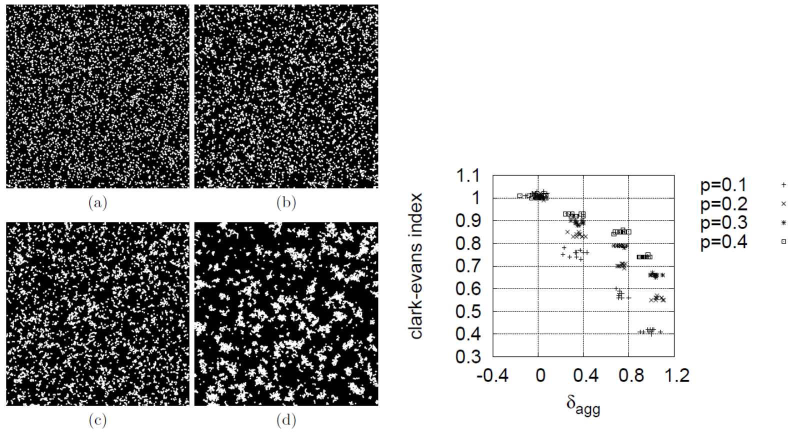

図７：凝集の数理モデルと，それに対する考案した凝集度合いの指標と Clark-Evans 指標の相関 [MSh1]

例えば，微粒子を含有した材料の場合，電子顕微鏡写真のデータから凝集度の度合いの数値化が必要となります．ランダムな点の配置に関する確率モデルである点過程では，Clark-Evans 指標が凝集度合いの指標として有名ですが，この指標を計算するには各円盤の中心点を予め知る必要があり，そのままでは電子顕微鏡写真に適用できません．そこで，ユークリッド空間内でのユークリッド距離による 1 パラメーター変形族の位相幾何量の変化を考えるというパーシステント・ホモロジーのアイデアを基礎に，より簡便な指標を構成し適用しました [MSh1]．パーシステント・ホモロジーや変形族の位相幾何量への着目は材料科学において画期的なものでした．それらの材料科学への適用範囲の拡大・改良のみならず，それらを超える新たな尺度を提供する新たな数学もまた，待ち望まれているのです．現在，推進されているデータ・サイエンスも，このような現場の課題を視野に入れたものであるべきです．

5.6. インク・化粧品などでの色材材料設計に向けた数学的表現量子ウォークによる波動（量子）計算シミュレーション

顔料インクの材料設計や塗布の設計，感光材料の設計，化粧品の設計などにおいては，コヒーレント光が拡散光になる状況や，弾道的なふるまいと波動的なふるまいの二つの性質を数学モデル化する必要があります [IKMM, M9]．キヤノン時代に採用していた数学モデルの検証を兼ねて行った解析が，量子ウォークによる波動計算シミュレーションです．

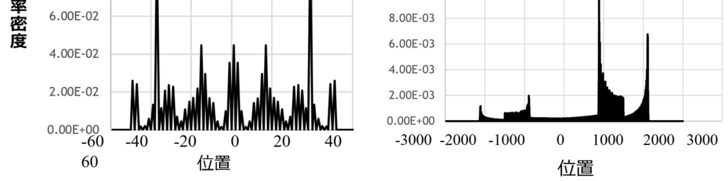

図８：量子ウォークによる干渉性と弾道性 [M9]

量子ウォークは2000年代に大きく発展した確率論のモデルです[IKMM]．それは，弾道的なふるまいと波動的なふるまいの両者を明確に記述できるほぼ唯一の数理モデルと言っても過言ではありません．

21世紀に入って技術が急速に発展しているのに対応して，数理モデルや対応する数学モデルもそれに相応したものでなければなりません．これは，21世紀の技術には21世紀の数学が必要であることを示す例のひとつであると感じます．

5.7. 鉄鋼の材料設計に向けた結晶のらせん転位の数学的表現: 代数的整数，アーベル群環，ζ関数を利用したモデル化

計測技術が劇的に発達したことに対応して，従来とは異なるレベルの現象の理解が必要となった例を提示します[HMNSU, M13]．製鉄において転位の発生を制御することは，鉄鋼の物性を左右するため極めて重要な課題です．近年，結晶レベルでの観測が実験的に可能となり，結晶レベルでの転位に対する関心は非常に高まっています．従来のらせん転位は，微分幾何や代数的位相幾何による連続性を仮定した解析が基本でしたが，結晶レベルでは離散的な視点で表現する必要が生じました．そこで代数的な手法や初等整数論を援用することによってらせん転位は表現可能であることを示したのが[HMNSU]です．

この表現手法により単純格子でのらせん転位と体心立方格子でのらせん転位の差異を議論できるようになりました．つまり，前者がガウス整数，後者がアイゼンシュタイン整数で表現されます．また，らせん転位によるエネルギーがエプシュタイン・フルビッツ ζ関数で表現されることを示しました．

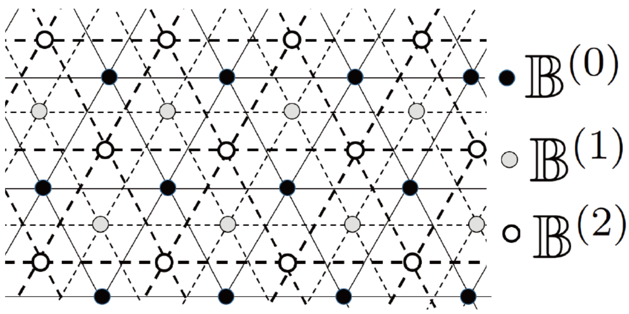

図9:BCC格子の[111]方向から射影図[HMNSU]

5.8. 整数論のガウスの和を利用した近接光学の数学的表現

これは近接光学の一つである分数タルボー効果が整数論のガウスの和によって表現されるという話です[MO, N2]．近接光学である分数タルボー効果がガウスの和によって表現され，それを通して「粒子と波動の相補性」と「平方剰余の相互法則」が結びつくことが判ります．これらの背景にヴェイユのユニタリー表現があることを思えば，特段驚くべきものではありませんが，ユニタリー表現が現実の物理現象を支配することはとても興味深いものです．

中性子線においては既にタルボー効果が観測できるようになっており，現在研究が進行していますし，タルボー効果を基礎とした新たな医療技術が提案・研究されています．現代技術は数学者が考えているより遥かに発展しており，それにより「ガウスの和」のような整数論が実際に観測されるようになっています．

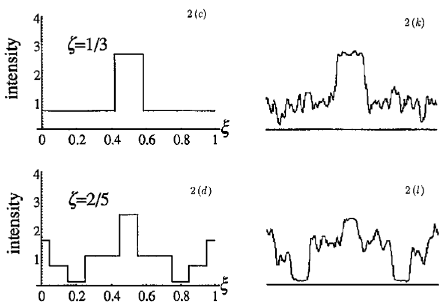

図10：タルボー効果，実験データと
ガウスの和による表現[BK]

これはストリング理論などの素粒子論を持ち出すまでもなく，物理学が整数論と関わる一つの例です．それも実験室以外の場所でも観測される現象においてです．

「整数論などは現実の物理の世界と結びつかない」というのは机上の考えです．先に述べたように，ガウスは連分数の解析を通してガウスの括弧を発見しましたが，それを光学の設計論に援用しました．その背景にあるのは $PSL(2,\mathbb{Z})$ と $SL(2,\mathbb{R})$ の同一性です．また，ガウスの和の研究を通して巡回群の群環の構造を見抜き，高速フーリエ変換を天体の軌道計算に援用しました．それらの経験を基礎として，ガウスは，算術が自然科学さらには数学の中で特別な位置にあるという数学観，自然科学観を持ったとみるべきと考えます．つまり，ガウスの中では算術（整数論）と自然現象とは，現代的な常識で見るより遥かに近いものだったのです．

21 世紀，技術が発展する中，技術と数学との 19 世紀以前の距離感を，社会全体が再認識するべきなのです．ガウスにはなれないまでも，ガウスが持っていた自然科学観，数学観に習うべき時期に来ているということです．

5.9. グラフの ζ 関数によるカーボンファイバーの電気伝導の数学的表現

カーボンファイバーとは，グラファイトの積層構造がメゾレベル (サブ μm) でランダムに構成されたものです．対象とする実験データは 1990 年代に取られたものです．2005 年に有限サイズのグラフの隣接行列の固有値のスペーシングの分布がウィグナー分布に従うことが数値実験により知られるようになり，それをグラファイトの電子系に適用したところ実験データを見事に再現することができました [MSa]．数学の発展により現象を表現できるようになった一例です．

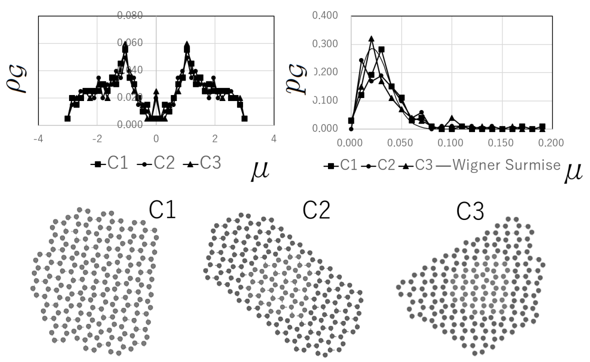

図 11：グラフェン片とそのエネルギー分布とエネルギーギャップの分布 [MSa]

5.10. ロボットの指による幾何学拘束（Caging）の数学表現

現在，ロボットハンドの物体拘束では，指の圧迫による力で拘束する方法を基礎としています．しかし，例えば小鳥や昆虫などを拘束する際，人は指によって籠を作り幾何学的に拘束をします．それを模したロボットハンドの物体拘束法が幾何学的拘束，Caging 法です．この幾何学的拘束 [MM] では，ユークリッド空間で余次元２の部分空間を抜いた空間での剛体のユークリッド・ムーブのパス（道）の空間の連結性の判断をしなければなりません [HMM].

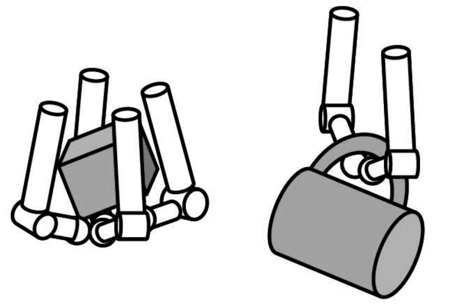
図 12：Caging 法 [MM]

知恵の輪のように，ユークリッド・ムーブを何度も何度も行うことで拘束が解かれる場合も考慮しなければなりません．実用上は，知恵の輪は各ピースを拘束できていると見るべきです．つまり，連続的な幾何学的対象に対して，ある種の組み合わせ爆

発や，拘束の度合いなども評価できる数学的な理論が必要となっています．その度合いについて提示したのが [HMM] です．

6. 終わりに　用の美としての数学

21 世紀，科学者・技術者が対峙している現実は，数学者が想像するより遥かに複雑です．純粋数学者は，純粋数学への絶対の信頼と現実の世界への無関心により「現実の世界は純粋数学より緻密にできていない」と思い込んでいるように感じます．そのために，幾つかの概念の有用性を数学の中で享受しているにも関わらず「こんな抽象的なことは現実の世界に役に立つはずがない」と考え，その有用性を非数学者にも判るようには発信してこなかったように思います．

他方，応用に従事する科学者は，自分の研究分野を表現する言葉が純粋数学に存在するなど想像する事もなく,「数学的にはそうかもしれないが，現実にはうまくいくはずがない」と，数学的な言葉や概念の利用を拒絶し，専門内のジャーゴンだけを使って技術を表現し伝承してきたように思われます．20 世紀は，細分化，先鋭化することで科学が発展した世紀でした．標準化されない言葉は分野間の融合を阻害しましたが，他方で，各分野は先鋭化することで発展してきました．

しかし，21 世紀は融合の時代です．ジャーゴンでしか表現できなかったものの多くは，現代数学も含めた高い視点から見れば，記述可能と思われます．統一した言葉で記述できれば，他分野との融合も促進されます．つまり,「ことばとしての数学」を使えばよいのです [M10].

「数学をことばとして使うとはどういうことか？」という問いは素朴な疑問でありながら深淵です.「ことばとしての数学を使う」と方針が定まっても，新たな一歩を踏み出すのはなかなか難しいものです．その問いの答えの一つが,「用の美」という概念の中にあるのではないかと考えています [M12].

「用の美」とは柳宗悦 (1889-1961) の用語です[7]．真理は一つとする西田幾多郎の「善の研究」からの影響も受けた民藝運動の中で示された概念です．私は金沢という地に昨年３月に降り立ち，長らく忘れていた[8]「用の美」の概念の深さを再認識するようになりました．金沢では工芸やデザインが日常の中で自然に存在しているように感じます．そして「ことばとしての数学」の一つの原型として,「用の美」があると思うようになりました．柳は民藝活動の中で，用の美の考えに達しました．民藝は用を離れて美はないとする「用美相即」の美学です．民芸品には純粋芸術にはない機能美という美しさ，使われることを前提とした美があることに気づきます．その美は時として純粋芸術よりはるかに深く，純粋芸術に影響を与え，また純粋芸術からの影響

図 13：篠原雅士作 2019 年

[7] 正確には,「用の美」という用語は柳宗悦の「用美相即」を判りやすくすることで流布されたもののようです．

[8] 私は故郷の愛媛県新居浜市で十代の頃から，陶芸家であり華道家でもある篠原雅士先生と交流させて頂いておりました．

も受けます．美を真理に置き換えれば，今直面している問いに通じるものがあると考えます．

オイラー，ベルヌーイ達の弾性曲線での楕円積分にしても，ガウスの$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$にしても，使われることによって深みを増しているように思います.「ことばとしての数学」にも，機能美としての美しさ,「使われることを前提とした」美(真理)があるはずです．使われることで磨き上がる数学があるとも考えています．

数学が単なる憧れの対象ではなく,「用の美」として，つまり,「科学・技術のことば」として，多くの人によって実際に使われ始めてほしいと願っています．

参考文献

[BK] M. V. Berry, S. Klein, Integer, fractional and fractal Talbot effects, J. Mod. Opt., **43** (1996) 2139-2164.

[B] H. J. M. Bos, Lectures in the History of Mathematics, AMS, 1993.

[CH] R. クーラン， D. ヒルベルト（丸山滋弥ら訳）数理物理学の方法（1-4）東京図書 1995年.

[dV] レオナルド・ダ・ヴィンチの手記（下）(杉浦明平訳) 岩波文庫 1958年.

[HMM] H. Hamada, S. Makita, S. Matsutani, Mathematics in Caging of Robotics, J. Geom. Symm. Phys., **44** (2017) 55-66.

[HMNSU] H. Hamada, S. Matsutani, J. Nakagawa, O. Saeki, M. Uesaka, An algebraic description of screw dislocations in SC and BCC crystal lattices, Pasific J. Math. for Industry, (2018) 10:3.

[IKMM] Y. Ide, N. Konno, S. Matsutani, H. Mitsuhashi, New theory of diffusive and coherent nature of optical wave via a quantum walk, Ann. Phys., **383** (2017) 164-180.

[MM] S. Makita, Y. Maeda, 3D Multifingered Caging: Basic Formulation and Planning, Proc. of 2008 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS2008) (IEEE) (2008) 2697–2702.

[M1] 松谷茂樹 線型代数学周遊：応用にむけて 現代数学社 2013年,（正誤表 http://smatsutani.jp/LACorrections20190119.pdf）.

[M2] 松谷茂樹 ものづくりの数学のすすめ 技術革新をリードする現代数学活用法 現代数学社 2017年.

[M3] 松谷茂樹 エラスティカを巡る数理〜ベルヌイ，オイラーから現代まで〜, 応用数理, **13** (2003) 48-60.

[M4] S. Matsutani, Hierarchical lattice generating method, apparatus, and storage device storing a program thereof, US Patent, US 6,995,766 B2,(2006).

[M5] S.Matsutani, Euler's elastica and beyond, J. Geom. Symm. Phys., **17** (2010) 45-86.

[M6] 松谷茂樹 ものづくりの数学， 数学通信 18, **3** (2013), 10-13.

[M7] 松谷茂樹 数学 Libre 12回: 楕円関数の故郷，エラスティカ，現代数学（現代数学社） 2016年3月号.

[M8] 松谷茂樹 Euler-Bernoulliの弾性曲線(elastica)とその一般化：楕円関数の萌芽からアーベル関数論の再構築へ, 日本数学会 代数分科会 特別講演 2017.9 山形大学.

[M9] 松谷茂樹 量子計算シミュレーションに向けて：光学と量子ウォーク，「量子ウォークの新展開—数理構造の深化と応用」(今野紀雄，井手勇介編) 第13章 p.248-266.

[M10] 松谷茂樹 数学 Libre 48-53回: 産業数理の発展に向けて I-VI， 現代数学（現代数学社） 2019年5月号-10月号.

[M11] 松谷茂樹 数学 Libre 47, 56, 57 寺澤寛一「自然科学者のための数学概論」について，自然科学者のための数学概論再考 I, II，現代数学（現代数学社）2019年4月号, 2020年1月号-2月号.

[M12] 松谷茂樹　数学 Libre 54-55, 57 回: 用の美と数学 I-II,「善の哲学」を通して，　現代数学（現代数学社） 2019 年 11 月号-12 月号, 2020 年 3 月号.

[M13] S. Matsutani, A Novel Discrete Theory of a Screw Dislocation in the BCC Crystal Lattice, arXiv:1906.04332.

[M14] 松谷茂樹　応用アーベル関数論 近代科学社　(2021 年出版予定).

[MNS] S. Matsutani, K. Nakano, and K. Shinjo, Surface tension of multi-phase flow with multiple junctions governed by the variational principle, Math. Phys. Analy. Geom., **14** (2011) 237-278.

[MO] S. Matsutani and Y. Onishi, Wave-particle complementarity and Gauss reciprocity in Talbot effect, Found. of Phys. Lett. **16** (2003) 325-341.

[MSa] S. Matsutani and I. Sato, A novel conductivity mechanism of highly disordered carbon systems based on an investigation of graph zeta function, Phys. Lett. A **381** (2017), 3015-3140.

[MSh1] S. Matsutani and Y. Shimosako, Measuring Agglomeration of Agglomerated Particles Pictures, J. Math-for-Industry, **5** (2013B-1) (2013) 83-91.

[MSh2] S. Matsutani and Y. Shimosako, On homogenized conductivity and fractal structure in a high contrast continuum percolation model, Appl. Math. Model. **39** (2015) 7227-7243.

[MSW] S. Matsutani, Y. Shimosako and Y.Wang, Fractal Structure of Equipotential Curves on a Continuum Percolation Model, Physica A **391** (2012) 5802-5809.

[NS] 中原幹夫 (著, 訳)，佐久間一浩訳，　理論物理学のための幾何学とトポロジー I, II, ピアソンエデュケーション 2001 年, (I, 原著第 2 版 日本評論社 2018 年)，Geometry, Topology and Physics, Taylor & Francis, 1990.

[N1] 二宮暁 再生への数学 14 回ヒルベルトとミンコフスキー, 現代数学（現代数学社） 2012 年 8 月号.

[N2] 二宮暁 21 世紀数学の未来像 20 回例えば，平方剰余の相互法則と相補性, 現代数学（現代数学社）2014 年 10 月号.

[N3] 二宮暁　21 世紀数学の未来像 23 回 ガウスに習う：2 次体と光学, 現代数学（現代数学社）2015 年 2 月号.

[R1] C. リード (加藤瑞枝訳）クーラント—数学界の不死鳥, 岩波書店 1978 年.

[R2] C. リード（彌永健一訳） ヒルベルト, 岩波現代文庫　2010 年.

[S] 鈴木俊洋　数学の現象学: 数学的直観を扱うために生まれたフッサール現象学　法政大学出版局 2013 年.

[Te1] 寺澤寛一　物理学に応用する数学上・下,　岩波講座物理学及び化学　岩波書店.

[Te2] 寺澤寛一　自然科学者のための数学概論　増補版　岩波書店 1984 年.

[Tr] C. Truesdell, The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies 1638-1788, Leonhardi Euleri Opera Omnia Ser. II Vol. 11 part 2, Orell Füssli, Zürich, 1960.