市民講演会報告：電卓・コンピューターで数を当てよう

木村俊一

1　はじめに

２００３年１２月２３日、湘南国際村にて「電卓・コンピューターで数を当てよう」というタイトルで市民講演会で話をさせていただきましたので、ご報告させていただきたいと思います。

数学的な内容は、お配りしたテキストをこの後につけておきますのでそちらをご参照いただくことにして、ここではプレゼンテーションで工夫したことについて述べさせていただきます。

まず、小田忠雄先生の退官講演や加藤文元さんの数学会での講演に刺激されて、PowerPoint を使って説明しました。インターネットを使って取ってきた数学者の写真や、説明に描いた図を簡単に表示[1]することができ、好評でした。湘南国際村の設備はよく整っていて、大きなスクリーンいっぱいにきれいに表示でき、こういう試みをするには最適の場所であったと思います。担当の渡辺聖司様が照明の制御装置の前にぴったりはりついて、板書をしたり Powerpoint に戻ったりするたびにていねいに照明の上げ下げをして下さったので、スクリーンが見づらい、白板が読みづらい、などの文句は一切ありませんでした。

講演後、湘南国際村の竹口秀夫社長から褒めていただいたのが、「勝負！」のスライド（次のページ参照）。ステージの前方、講演者から見えない場所に

[1] インターネットで取ってきた写真を公にするのは著作権上問題があるのでは、と後で小田先生から指摘をいただきました。特にそのページで引用禁止をことわっていない場合は、出典を明らかにすれば構わない、と私は思うのですがどうなのでしょうか？数学者の切手の絵柄ファイルを取って来れれば、著作権は大丈夫？

白板を置いて、参加者から問題を出してもらい、その場で講演者が連分数を使って数当てをする、という趣向です。計算前に連分数の計算方法を解説して、参加者にも計算練習をしてもらってから実演するので、先にタネを明かしてから手品をするようなものですが、それでも正解が出た時には拍手喝采でした（一方講演者の方は、一応練習はしてあるものの、かなりドキドキものでした。なお、安全のため２桁÷２桁に限っていますが、３桁程度なら大丈夫です、多分。）幸い、約分できる分数を出題して下さった方がいたので、(「正解」ではないので拍手がまばらで、一瞬ドキッとしました)、そういう場合にどうなるか、ついでに解説できたのも、もうけものでした。

話をラマヌジャンの伝記から始めて、最後にラマヌジャンの円積問題に対する貢献を連分数を用いて解説する（テキストで付録３）、という流れにしたのもうまくいったと自負しています。アンケートで「内容は難しかったがおもしろかった」という意見が多かったので、まあ半分は成功と言って良いと思います。竹口社長、渡辺様はじめ、お世話になった湘南国際村の皆様がた、またこんな機会を与えて下さった日本数学会広報委員の方々にこの場を借りてお礼したいと思います。

2　動機

数年前、学部学生や大学院の学生と一緒になってコンピューターで何かやってみよう、というプロジェクトを始めた。学生によって数学の知識にかなり幅があるので、既存の知識では手が出せず、全員が最初から考えねばならないようなテーマが望ましい。天才ラマヌジャンからインスピレーションを得て（インスピレーションの内容については、付録 3 参照)、次のような問題を考えてみた。

「数が小数の形で具体的に与えられた時に、その数の正体をコンピューターを使って見破る方法を考えよ。」

例えば「1.41421356」と入力すれば「$\sqrt{2}$」と出力し、「3.1415926」と入力すれば「円周率 π」と出力するような、そんなプログラムがあればいいな、と思ったわけだ。この問題を電子ラマヌジャン問題と名付けて、多少わかったことがあるので、その成果を発表したいと思った次第である。

結論から言うと、ずっと昔から深いことが知られていて既存の知識でかなりのことができるし、調べていくうちに数学史上の面白い場面にも出会うことができたのである。電子ラマヌジャン問題、というネーミングも、最初考えていた意味では適切ではないことがわかってきた。でも別の意味では当たっていると言えなくもないので、この名前はそのまま残しておきたい。

3　まず手慣らしから（等比級数）

まず次のような数を考えてみる。

$$S = 0.1 - 0.01 + 0.001 - 0.0001 + \cdots$$

小数点以下、0 の数がひとつづつ増えていき、プラスとマイナスが交互にあらわれる。この数の正体は、一体何だろうか？

プラスとマイナスをそれぞれ一組としてまとめていくとわかりやすい。つまり

$$
\begin{aligned}
S &= \overbrace{0.1 - 0.01}^{0.09} + \overbrace{0.001 - 0.0001}^{0.0009} + \overbrace{0.00001 - 0.000001}^{0.000009} + \cdots \\
&= 0.09090909\cdots
\end{aligned}
$$

となる。S を１００倍してみると $100S = 9.090909\cdots = 9 + S$ なので、$100S$ から S を引き算すると

$$
\begin{array}{rcl}
100S &=& 9.09090909\cdots \\
-)\quad S &=& 0.09090909\cdots \\
\hline
99S &=& 9.00000000\cdots
\end{array}
$$

となり、$S = \dfrac{9}{99} = \dfrac{1}{11}$ であることがわかる。

この S については他の計算方法もあって、もともとの級数が初項 0.1、公比 -0.1 の無限等比級数であることを見抜けば、無限等比級数の和の公式

$$
a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1-r} \quad ただし\ -1 < r < 1
$$

を使って $S = \dfrac{0.1}{1-(-0.1)} = \dfrac{0.1}{1.1} = \dfrac{1}{11}$ と同じ答が求まる。検算として $1 \div 11$ を計算してみると、確かに $0.09090909\cdots$ となることが確かめられる。

小数点以下、あるところから先は同じ数字の並びが繰り返す小数（つまり循環小数）は全てこの方法（繰り返しの部分がキャンセルするように、何倍かしてから引き算する、あるいは無限等比級数の公式を使う）で正体を見破ることができる。

例題１ 次の小数の正体を見抜け。

1. $0.027027027\cdots$（027 が繰り返す）
2. $0.037037037\cdots$（037 が繰り返す）
3. $0.21111\cdots$ （１が繰り返す）

特にこの計算方法により、循環小数は $\dfrac{整数}{整数}$ という形の分数として表されることがわかる。$\dfrac{整数}{整数}$ という形にあらわされるような数のことを有理数と呼ぶ。

面白いことに、この逆も成立する。つまり、全ての有理数 $\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ は循環小数か、あるいは有限小数になる。(「0.5 のような有限小数は $0.5 = 0.50000\cdots$ という循環小数の一種だ」と強弁すれば、全ての有理数が循環小数である、と言えないこともない。)理由については付録 1 を御覧下さい。

その応用として、有理数が十分たくさんの桁数までわかっていれば、その小数を見て元の分数の形を言い当てることができる。つまりその数字の並びから、同じ数字の繰り返しを見つけだして、上の例題を解いたのと同じ方法を使えば良い。しかしこの方法には致命的な欠陥がある。循環のループの桁数が、分母と同じくらい大きくなる可能性があるのである(実験してみると、3 割くらいの確率でループの桁数が分母と同じくらいになる)。

例題 2

1. $1 \div 7, 2 \div 7$ の循環のループの長さはいくつか?(一方を解けば、もう一方は計算が省略できますが、わかりましたか?)
2. $1 \div 13$ の循環のループの長さはいくつか? $2 \div 13$ の循環のループの長さはいくつか?(こちらはよほど勘が良くないと、計算が省略できません。)

4 計算テクニック:連分数

循環なしで数の正体を見抜くテクニックとして連分数というものがある。正体を知りたい数に対して、次の手順を繰り返す:

手順:小数部分を取り出して、逆数を計算する。整数部分を記録しておく。

例えば $123.456 = \overbrace{123}^{\text{整数部分}}.\overbrace{456}^{\text{小数部分}}$ という数で言えば、整数部分は 123、小数部分は 0.456 と定義する。(よって、123.456 の連分数を計算するなら、最初のステップは整数部分の 123 を記録して、小数部分の 0.456 の逆数を計算することになる。)

試しに、$0.2916666\cdots$(以下、6 が続く)という数の正体を連分数を使って見破ってみよう。

$0.29166666\cdots$ の整数部分は 0、小数部分は $0.29166666\cdots$。

$$1 \div 0.291666666 = 3.4285714$$

3.4285714 の整数部分は 3、小数部分は 0.4285714

$$1 \div 0.4285714 = 2.3333335$$

2.3333335 の整数部分は 2、小数部分は 0.3333335

$$1 \div 0.3333335 = 2.9999985$$

厳密には整数部分は 2 だが、誤差を考慮すると、これは 3 ぴったりだと考えて良かろう。これで小数部分が 0 になるので、連分数表記を作る計算は終わる。

これでどうして $0.291666\cdots$ という数の正体を見破ったことになるのか？上の計算結果を使って $0.291666\cdots$ を書き換えていくと

$$\begin{aligned}
0.29166666\cdots &= \frac{1}{3.4285714\cdots} \\
&= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2.333333\cdots}} \\
&= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}} \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (*) \\
&= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7/3}} \\
&= \cfrac{1}{3+\cfrac{3}{7}} \\
&= \frac{1}{24/7} \\
&= \frac{7}{24}
\end{aligned}$$

まず、分数が連なった「連分数」として書き下す（＊）。それを分数の下の方から計算していけば、数の正体が明らかになっている、という仕掛けだ。検算すると確かに $7 \div 24 = 0.2916666\cdots$ となる。

連分数で数を当てる場合は、数の並びのパターンがわかっている必要はない。機械的に計算して正解が求まるので、プログラムに組みやすい。ただし概数計算なので、誤差を正確に評価する必要がある。

$0.291666\cdots$ の連分数計算では、途中で元の数よりも複雑になったような気がする。分数の形によっては、どこまで計算しても終わらない、なんてことがあるのではないか？いや、その心配はない、連分数の計算を続けていくと、必ずいつかは小数部分が 0 になるのである。その理由を調べておこう。$0.291666\cdots$ の連分数の計算をしたとき、分数表記でどんな計算をしていたのか書き表わしてみると、

$$\begin{aligned}\frac{7}{24} \quad \Rightarrow \quad \frac{24}{7} \quad &= \quad 3+\frac{3}{7} \quad \text{小数部分は } \frac{3}{7} \\ \Rightarrow \quad \frac{7}{3} \quad &= \quad 2+\frac{1}{3} \quad \text{小数部分は } \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \quad \frac{3}{1} \quad &= \quad 3 \qquad\quad \text{小数部分は } 0\end{aligned}$$

分数を次々と帯分数、つまり整数＋真分数（分子の方が分母よりも小さい分数）の形に書き換える。小数部分を取るとは、この真分数の部分を選び取る、ということなのだ。そこで、その真分数の分母分子を引っくり返した数が、次のステップへ送られる、というわけだ。だから、ステップをひとつ進む毎に、分母はだんだん小さくなっていく。よっていつかは分母が 1 になる、つまり逆数が整数になり、小数部分がなくなる、という仕組みだ。

例題３

1. $0.155555\cdots$ を（連分数を使って）分数の形にあらわせ。
2. $0.233333\cdots$ を（連分数を使って）分数の形で表せ。

循環のパターンが読めない数の正体を当ててみよう。まず、フィボナッチ数列というものを準備する。フィボナッチ数列とは、次のような数の列である。

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, \cdots$$

初めて御覧になる方は、パターンが読み取れただろうか？その通り、その前の二つの数を足して次の数を作っているのである。$1 + 1 = 2, 1 + 2 =$

$3, 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13, \cdots$。この数字を並べて小数を作る。つまり、$S = 0.11235\cdots$ という数を考えるのである。５桁目までしか書いていないのは、６桁目からは下からの繰り上がりがあって、数字がずれてしまうからである。S の決め方を正確に書くと

$$
\begin{array}{rlllllllll}
 & 0. & 1 & & & & & & & \\
 & 0. & 0 & 1 & & & & & & \\
 & 0. & 0 & 0 & 2 & & & & & \\
 & 0. & 0 & 0 & 0 & 3 & & & & \\
 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & & & \\
 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & & \\
 & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \\
+) & 0. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
\hline
 & 0. & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 9 & 5 & \cdots
\end{array}
$$

のようになる。足し算の最後の桁が…になっているのは、さらに次の３つ（！）の足し算からの繰り上がりがあって、値が 5 になるからである。

さて、こうやってフィボナッチ数列を（桁数を考慮して）並べた数に対して、連分数を適用してみよう。まずはまるごと小数部分なので、$1 \div 0.1123595$ を計算すると、8.900004 となる。もともとの数字 0.1123595 が、７桁くらいの精度だと考えると、割算の７桁目で出てきた 4 は誤差だろう、と想像がつく。よって、S の真の値は $\dfrac{1}{8.9} = \dfrac{10}{89}$ となりそうだ。$10 \div 89$ を計算してみると、$0.11235955056\cdots$ となる。フィボナッチ数をもう少し先まで（３７７まで）足せば、ぴったり同じ数字の並びになる。

フィボナッチ数のかわりにリュカ数列を使ってみよう。フィボナッチ数列は最初の二つの数を $1, 1$ から始めていたが、それを $2, 1$ から始めたものがリュカ数列だ。ずらっと並べてみると、次のようになる。

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, \cdots$$

この数を並べると（１９９のところまで足すと）、$T = 0.213483146\cdots$ となる。T の連分数を計算してみると、$1 \div 0.213483146 = 4.68421052\cdots$ となる。小数部分の逆数を取ると、$1 \div 0.68421052 = 1.4615384\cdots$。まだ全く規則性

が見えないが、挫けずにこの小数部分の逆数を求めると $1 \div 0.4615384 = 2.166666\cdots$、これでようやく結末が見えてきた。最後に $1 \div 0.166666 = 6.00002\cdots$ となり、これは 6 であろう。そうすると、

$$T = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6}}}} = \frac{19}{89}$$

となる。実際、$19 \div 89 = 0.213483146067\cdots$ となり、ぴったり数字が一致する。

なぜフィボナッチ数列やリュカ数列を並べた分数に、89 なんて同じ数が現れてくるのか？これには、次のように説明をつけることができる。例えばフィボナッチ数列に対して

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrl} & S & = & 0.1 & + & 0.01 & + & 0.002 & + & 0.0003 & +\cdots \\ & 0.1S & = & & & 0.01 & + & 0.001 & + & 0.0002 & +\cdots \\ -) & 0.01S & = & & & & & 0.001 & + & 0.0001 & +\cdots \\ \hline & 0.89S & = & 0.1 & & & & & & & \end{array}$$

S から $0.11S$ を引き算すると、最初の 0.1 を除いて全てキャンセルしてしまうのである。

例題 4

1. 0.76470588 を分数に書き換えよ。
2. $0.13043478\cdots$ を分数で書き換えよ。

5 連分数、応用編

電卓に、何でもいいから正の数を入れてみよう。そして「1 を足してルートを取る」という計算を繰り返す。何度か繰り返すうちに、一定の数に近付いていくことがわかるだろう。その近付く先は $x = 1.6180339887\cdots$ となるはずだ。

さて、x の正体が連分数を使って見破れるだろうか？小数部分は 0.6180339887 だ。この逆数を計算してみる。$1 \div 0.6180339887 = 1.6180339888\cdots$、まだ割り切れないな、もう一度、と次の小数部分の逆数を計算する前に、よくよく元の数 x と見比べてみよう。何と、小数点以下 9 桁目までぴったり一致しているではないか。誤差を考慮すれば、実は同じ数に戻ってくるのだろう、と想像できる。同じ数に戻ってくる以上、連分数の計算をいつまで続けても、小数部分が 0 になることはない。では、この数は連分数で正体を見破ることは不可能なのか？とんでもない！実は既に x の正体は見破ったも同然なのである。

x は小数部分（つまり $x-1$）の逆数を取ったら元の x に戻るような数であることがわかった。これを式で表してみると、

$$x = \frac{1}{x-1}$$

ということになる。両辺に $x-1$ をかけると

$$x^2 - x = 1$$

と 2 次方程式となり、これを解くと $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ のどちらかだ、ということがわかる。複号がマイナスとなるほうは負の数となってしまい、x とは違う。よって、$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となることがわかった。$\sqrt{5} = 2.236067977\cdots$ となるので、$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988\cdots$ となり、ぴったり数があっている。この数、$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金比として知られる数で、ギリシア時代、縦横の比率が黄金比の長方形が最も美しい形だとされ、アテネのアクロポリス神殿の縦横の比率もこの黄金比になっているという。

今の計算から、ついでに面白いことがわかった。黄金比 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が無理数（つまり有理数ではない実数）であることが証明できてしまったのだ。有理数（$\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ という形で表される数）の連分数を計算すると、いつかは小数部分が 0 になって計算が終了することを証明した。ところが黄金比は連分数の計算がいつまでたっても終了しないのだから、黄金比は $\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ という形では表せないのである。

小数部分の逆数が元に戻ったことに気付かずに計算を続けると、同じ計算を延々と繰り返すことになる。その結果、x は連分数によって

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}$$

と、「無限循環連分数」の形に表されることになる。

ちなみに、最初に「１を足してルートを取る」という方法で黄金比を作り出したわけだが、こちらの計算をそのまま表記すると、やはり無限に続く、次のような式で表される：

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$$

この式からも、直接 x の正体を見破ることは可能だ。$x = \sqrt{1+x}$ と考えて（右辺を、右辺の外から二つ目のルートの部分に代入！）両辺を２乗すると $x^2 = 1 + x$ と、同じ２次方程式が得られる。

他の無理数の連分数を計算してみよう。$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ とする。小数部分 0.41421356 の逆数を計算してみると $2.41421357\cdots$ となる。黄金比の例では小数部分の逆数が自分自身に戻ったが、$\sqrt{2}$ の場合は小数部分の逆数を取ると１だけ増えるようだ。分母の有理化を計算することによって、それを厳密に確かめることができる。実際、$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$ である。

一方、「小数部分の逆数を取ると元の数より１だけ大きくなる」ということから、$1.41421356\cdots$ という数が $\sqrt{2}$ だと知らなくても、それを導き出すことができる。実際、正の数 y が、「$y-1$ の逆数が $y+1$ に等しい」という条件を満たしたとしよう。$y + 1 = \dfrac{1}{y-1}$ だから、両辺に $y-1$ をかけて $y^2 - 1 = 1$、よって、$y = \pm\sqrt{2}$ となる。y は正なので、$y = \sqrt{2}$ と正体が見破れることになる。

例題 5 （１）$0.236067977\cdots$ の正体を見破れ。

（２）$0.30277563773\cdots$ の正体を見破れ。

（３）$1.1925824\cdots$ の正体を見破れ。

「無限循環連分数」はもっと複雑になることもありうる。$\sqrt{3}$ の連分数を計算してみよう。$1.7320508\cdots$ の小数部分の逆数は $1.3660254\cdots$ となり、元の数とは似ても似つかぬ数の並びとなる。しかしもう一度小数部分の逆数を取ると、$2.7320508\cdots$ になり、$\sqrt{3}+1$ と同じ数字の並びとなる。連分数として書き表わすと、

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}$$

のように最初の 1 を除いて 1 と 2 が交互に繰り返す無限循環連分数となる。分母の有理化を使って計算すると、

$$1.7320508\cdots = \sqrt{3} \Rightarrow 1.3660354\cdots = \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{3}+1)/2-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$$

という計算になっていたことがわかる。

もちろんこの無限循環連分数の形から $1.7320508\cdots$ の正体を見破ることができる。$z = 1.7320508\cdots$ として、連分数の計算により

$$z = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+z}}$$

と表されることがわかる。この式の右辺を整理して、$z = \dfrac{2z+3}{z+2}$ となるので、分母を払って $z^2 + 2z = 2z + 3$ が得られるから $z > 0$ から $z = \sqrt{3}$ と求まる。

例題６（１）2.44948974 の正体を見破れ。

（２）4.242640687 の正体を見破れ。

事実 1.7320508 の連分数表示からその正体を見破る計算を見ればわかる通り、無限循環連分数になるような数は、ある 2 次方程式の解になっている。整数係数の 2 次方程式の解として表されるような無理数を、2 次の無理数と呼ぶので、無限循環連分数は 2 次の無理数である、という言い方もできる。逆に 2 次の無理数の連分数を計算すると、必ず無限循環連分数になることがわかる。連分数を計算していく際の「小数部分」を、分母の有理化によってきちんとあらわし、その小数部分を解とする 2 次方程式を考えると、高々有限個の可能性しかないことがわかるのである。このような見方で鮮やかに連分数の理論を整理して見せたのが、ガウスの「整数論講義」であった。

6　フェルマーの連分数近似

$\sqrt{2}$ の連分数表示

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

をとり、これを途中で打ち切って作った分数を考えてみよう。

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1.416666\cdots$$

このような分数を、$\sqrt{2}$ の連分数近似と呼ぶ。いずれも分母が小さいわりに、随分正確な近似になっていることがわかる。実際、付録にある通り、連分数

による近似が大変良い近似になることが厳密に証明できる。これを使って、次のような遊びをすることができる。

$\dfrac{y}{x}$ が $\sqrt{2}$ の大変良い近似であるとしよう。すると、$\dfrac{y^2}{x^2}$ は 2 に大変近いので、y^2 は x^2 のほぼ 2 倍になっているはずだ。$\sqrt{2}$ のそれぞれの連分数近似に対して y^2 と $2x^2$ の差を計算してみよう。

$$\frac{3}{2} \Rightarrow 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1$$

$$\frac{7}{5} \Rightarrow 7^2 - 2 \cdot 5^2 = 49 - 50 = -1$$

$$\frac{17}{12} \Rightarrow 17^2 - 2 \cdot 12^2 = 289 - 288 = 1$$

フェルマーは、このような現象をよりていねいに観察し、次のような定理を発見した。

定理 正整数 n を $\sqrt{n}$ が整数とならないような数であるとすると、$y^2 - nx^2 = 1$ という方程式の正整数解 (x, y) は無限に存在し、しかもそのような解は全て連分数近似の中に現れる。

フェルマーはこの定理の証明を書き残してはいないけれども、少なくとも何らかの説明は持っていたのだろう、と信じられる根拠がある。というのは、次のような逸話が残されているからだ。

誰にも自分の数論を理解してもらえず孤独を感じていたフェルマーは、1656 年に出版されたウォリスの著書「無限算術」を受け取って久しぶりに血が沸き立つのを感じていた。まだまだ新米だが（ウォリスは１６４７年に３１歳にして初めて 2 次方程式を勉強して感動し、数学を猛勉強、翌４８年にはオックスフォード大学の幾何学教授になっていた）、才能のきらめきが感じられる。フェルマーはウォリスに挑戦状を送りつけた。

第 1 問: $x^2 - 61y^2 = 1$ の解を求めよ。

第 2 問: $x^2 - 109y^2 = 1$ の解を求めよ。

しかし、ウォリスの答を見て、フェルマーはがっかりした。ウォリスの答は、分数だったのである。

「整数で答を見つけよ、という問題に決まっているじゃないか。分数で良ければどんな新米だって、答が見つけられる。[2]せっかく計算が楽なように、答が小さい数になるような問題を選んで送ったのに。」

だが、ウォリスが「ブラウンカーの方法を使ったのだが」と言って次によこした答は、フェルマーが秘蔵していた答にぴったり合っていた。第 1 問の答は $x = 1766319049, y = 226153980$ で、第 2 問の答は $x = 158070671986249, y = 15140424455100$。今なら $x = 1, y = 0$ という分数より簡単な解を思い付くところだが、フェルマーの時代は 0 は数とは認められていなかったのだ。そして、正の整数解となると、ウォリスが返した答が、これでも最小の解なのである。「素晴らしい、大正解だよ。」とフェルマーは賛辞の手紙を送った。答が小さい数になるように選んだなんて、もちろん大嘘。$x^2 - Ny^2 = 1$ の形の問題で $N < 149$ の範囲では、最小解が億以上の桁に達するのは $N = 61$ と $N = 109$ しかない。

一旦は良きライバルを発見して喜び勇んだフェルマーであったが、その後ホイヘンスに書き送った手紙の中で、フェルマーは次のようにぼやいている。

「駄目なんだよ。よく見るとウォリスの答には、一般に通用する証明がついていないんだ。」

ウォリスは直観力にすぐれた数学者であったが、論理的厳密性には欠けるきらいがあった。「無限算術」ではウォリスは「帰納法」を駆使して有名なウォリスの公式

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}$$

を導き出しているが、その帰納法とは、いくつか実験してみて合っていればそれでその式が正しい、とする論法であった（正しい式を推測する手段としては良い方法だが、それでは証明にならない）。フェルマーはウォリスの「帰納法」を非難する手紙を送りつけている。

ちなみに、$\sqrt{69}, \sqrt{109}$ の連分数展開は、整数部分だけをずらっと並べると、$\sqrt{69}$ が

$$7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14$$

---

[2]例えば $x = \dfrac{a^2 + 61}{a^2 - 61}, y = \dfrac{2a}{a^2 - 61}$ や $x = \dfrac{a^2 + 109}{a^2 - 109}, y = \dfrac{2a}{a^2 - 109}$ が一般解となるので、分数解で良ければそれほど難しくはない。$a = 1$ を代入すれば、第 1 問の分数解 $x = -\dfrac{31}{30}, y = -\dfrac{1}{30}$ が、第 2 問の分数解 $x = -\dfrac{55}{54}, y = -\dfrac{1}{54}$ が得られる。

最後の 14 の手前までの近似分数が正解を与える。ちなみに 1 つめの 14 の手前の 1 までだと連分数近似が $\dfrac{29718}{3805}$ となり、$29718^2 - 61 \cdot 3805^2 = -1$ となる。また $\sqrt{109}$ のほうは

$$10, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20$$

最後の 20 の手前までの近似分数が正解をあたえ、こちらも 1 つめの 20 の手前までの連分数が $\dfrac{8890182}{851525}$ となって、$8890182^2 - 109 \cdot 851525^2 = -1$ となる。

例題 7

1. $x^2 - 10y^2 = 1$ となる正整数 x, y の組を一組求めよ。
2. $x^2 - 11y^2 = 1$ となる正整数 x, y の組を一組求めよ。
3. $x^2 - 7y^2 = 1$ となる正整数 x, y の組を一組求めよ。
4. $x^2 - 13y^2 = -1$ となる正整数 x, y の組を一組求めよ。（ちょっと大変）
5. $x^2 - 13y^2 = 1$ となる正整数 x, y の組を一組求めよ。（かなり大変）

黄金比の連分数展開 $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$ による連分数近似を計算してみると、順に $1+\dfrac{1}{1}=\dfrac{2}{1}$、$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=\dfrac{3}{2}$、$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}=\dfrac{5}{3}$、$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\dfrac{8}{5}, \cdots$ となる。どこかで見たことがある数ではないだろうか？そう、フィボナッチ数列がこんなところに現れるのである。

7　付録１、有理数は循環小数である

$\dfrac{\text{整数}}{\text{整数}}$ という形の分数（つまり有理数）を小数で表すと、途中で割り切れるか、あるいは必ず循環小数になる。その理由を考えよう。

（説明）例えば筆算で $3 \div 7$ を計算してみよう。（実際に紙に書いて計算してみて下さい。$0.428571428\cdots$ という答になりますが、答よりも計算過程が大事です。）それぞれの桁を求めて 7 をかけ、引き算して「余り」を計算することによって、割算が進行していく。この「余り」に着目しよう。$3 \div 7$ の計算では、7 で割っているのだから、余りが 7 以上になることはない。よって、出てくる余りは 0 から 6 までの 7 通りの可能性がある。

さて、余りが 0 になれば割り切れて、計算はおしまい。その場合は有限小数となる。割算の結果が有限小数でなければ、「余り」として出てくる可能性がある数は、1 から 6 までの 6 通り。よって 7 で割算する場合は、最高でも 7 桁目まで計算した時点で、必ず同じ「余り」が 2 回以上出てきているはずである。（実際、ちょうど 7 桁目で余りが 3 となり、最初の数字に戻っている。）ところが、同じ余りからは、全く同じ計算が進行することになる。つまり、同じ数字の並びが繰り返すことになり、割り切れない場合は循環小数になることがわかった。同様に、例えば 43 で割算する場合は最高でも 43 桁目で、103 で割算する場合は最高でも 103 桁目で循環のループに入ることがわかる。（説明終わり）

8　付録２、連分数近似の精度

定義 二つの分数 $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ が <u>最接近</u> とは、$ad - bc = \pm 1$ となること、と定義する。（ここで、a, b, c, d は全て正整数とする。）

命題１ 二つの分数 $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ が最接近ならば、$\dfrac{a}{b}$、$\dfrac{c}{d}$ はともに既約分数である。

証明） 例えば a, b が公約数 $e > 1$ を持てば、$ad - bc$ も e の倍数になるはずなので、1 にはなりえない。c, d についても同様。（証明終わり）

命題２ 二つの分数 $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ が最接近であるための必要十分条件は、$\left|\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}\right| = \dfrac{1}{bd}$ となることである。

証明） 左辺を計算してみる。

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right| = \left|\frac{ad-bc}{bd}\right| = \frac{|ad-bc|}{bd}$$

これが $\dfrac{1}{bd}$ と一致する、ということは $|ad-bc|=1$、つまり $ad-bc=\pm 1$ ということと同値である。（証明終わり）

命題３ 二つの分数 $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ が最接近ならば、正整数 n に対し $n+\dfrac{a}{b}$ と $n+\dfrac{c}{d}$ も最接近である。

証明） $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ が最接近なので、命題２より $\left|\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}\right| = \dfrac{1}{bd}$ である。よって、$\left|\left(n+\dfrac{a}{b}\right)-\left(n+\dfrac{c}{d}\right)\right| = \dfrac{1}{bd}$、よって再び命題２により、$n+\dfrac{a}{b}$ と $n+\dfrac{c}{d}$ は最接近である。（証明終わり）

命題４ 二つの分数 $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ が最接近ならば、それぞれの逆数 $\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{d}{c}$ も最接近である。

証明） それぞれの逆数 $\dfrac{b}{a}$ と $\dfrac{d}{c}$ が最接近であるとは、定義より、$bc-ad=\pm 1$ ということである。ところが仮定「$\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ が最接近」より、$ad-bc=\pm 1$ なので、OK。（証明終わり）

定理 正の実数 α の連分数展開

$$\alpha = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cdots}}}}$$

をとり、その連分数近似 $\dfrac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$ と $\dfrac{c}{d} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}$

を考える。すると、$\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ は最接近である。

証明） $a_n = \dfrac{a_n}{1}$ と $a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}$ は、定義より（あるいは命題２により）最接近である。よってそれらの逆数 $\dfrac{1}{a_n}$ と $\dfrac{1}{a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}}$ も命題４により最接近。

よってそれらに a_{n-1} を加えた $a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}$ と $a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}}$ も命題３により最接近。よって、それらの逆数 $\dfrac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}}$ と $\dfrac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}}}$ も命題４により最接近。

以下同様に「同じ正整数を加える」「逆数を取る」という操作を繰り返して、$\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ という二つの分数が得られるが、命題３と命題４により、「最接近である」という性質はこれらの操作で保たれるので、最終結果である $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ も最接近である。（証明終わり）

系１ 正の実数 α の、連続した連分数近似 $\dfrac{a}{b} = a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{\cdots + \dfrac{1}{a_n}}}$ と $\dfrac{c}{d} = a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{\cdots + \dfrac{1}{a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}}}}$ の差は $\dfrac{1}{bd}$ である。また、連分数近似で得られる分数は既約分数である。

証明） 定理より $\dfrac{a}{b}$ と $\dfrac{c}{d}$ は最接近なので、命題１と命題２を適用すればよい。（証明終わり）

系2 正の実数 α を連分数近似して $\dfrac{a}{b} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$ という値を得たら、その近似の誤差 $\left|\alpha - \dfrac{a}{b}\right|$ は $\dfrac{1}{b^2}$ 以下である。

証明） 連分数近似の計算方法からわかる通り、連分数近似は正しい値より「少し大きい」「少し小さい」という近似を交互に繰り返している。つまり α は $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}$ と $\dfrac{c}{d} := a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}$ との間にある。

よって、

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \frac{1}{bd} < \frac{1}{b^2}$$

である。（証明終わり）

9 付録３、ラマヌジャン

ギリシアの３大作図問題：角の三等分、倍積問題、円積問題のうち最後に残った円積問題がリンデマンによって解決されたのは 1882 年のことであった。円が与えられた時、それと同じ面積の正方形を作図することは、定規とコンパスだけでは不可能なのである。

１９１０年、創刊されたばかりのインド数学会の論文集でリンデマンの定理が取り上げられた。ところが、それを見て刺激を受けたラマヌジャンは円積問題に挑戦する論文を発表した。正確に同じ面積、というのは無理かもしれないが、近似の正方形なら作図可能だ、というのである。その近似の精度がものすごい。半径１０００ km の円に対する円積問題の正解は一辺が $1772.453850905516 \cdots$ km という正方形になるのだが、これに対しラマヌジャンの作図方法を用いると一辺が $1772.4538506214 \cdots$ km という正方形が描かれるのである。誤差は僅か 0.3mm だ。ちなみに、半径 1000km の円を中心

で地表に接するように置くと、地球は丸いため、その円周は地上 78km の高さにまで浮かび上がることになる。

ラマヌジャンの作図法とは、$\sqrt{\pi}$ を $\sqrt{\sqrt{\sqrt{97+9/22}}}$ で近似する、というものだ。$\sqrt{\pi} = 1.772453850905516\cdots$ という数を見て、それが $\sqrt{\sqrt{\sqrt{97+9/22}}}$ に近いと見抜いたのか、とラマヌジャンの恐るべき数字感覚に驚いて「電子ラマヌジャン問題」という言葉を思い付いたわけだが、その後ラマヌジャンの仕事を色々見ていると、数字に対する感覚というよりも、式の形に対する鋭い美的感覚の方が本質的なような気がしてきた（いまだにラマヌジャンの数学がわかったという気持ちにはなれないが）。

どうやってラマヌジャンがこの近似分数を見つけたかは記録に残っていないが、恐らく連分数によるのだろう、という説が有力である。$\pi^4 = 97.40909103400\cdots$ の連分数展開を計算してみると、

$$\pi^4 = 97 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16539 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}$$

となる。ここで、16539 という大きな数が出てくるのが目に付く。これは、$\dfrac{1}{16539}$ の部分を 0 で近似しても誤差が非常に小さいことを意味する。つまり $\pi^4 \approx 97 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3+1}}} = 97 + \dfrac{9}{22}$ というのは非常に良い近似だというわけだ。この両辺の 8 乗根が、ラマヌジャンの作図に用いられているのである。結果的に「電子ラマヌジャン問題」というネーミングは、思いがけず正解だっ

たようだ。

10　付録４、例題解答

例題１解答 (1) $S=0.027027027\cdots$ とおくと、$1000S=27.027027\cdots=27+S$ なので、$999S=27, S=\dfrac{27}{999}$ だが、これは約分ができて、$S=1/37$ となる。(2) 同様に $T=0.037037\cdots$ とおけば、$T=\dfrac{37}{999}=1/27$ である。(3) $U=0.2111\cdots$ とおくと、$10U=2.1111\cdots$ となるので、$9U=1.9$ である。よって、$U=\dfrac{1.9}{9}=19/90$ である。

例題２解答 (1) $1\div 7=0.142857\cdots, 2\div 7=0.285714\cdots$ で、循環は６桁。同じ数字の並びで、出発点を入れ替えただけ。

(2) $1\div 13=0.076923\cdots$ で、循環は６桁。$2\div 13=0.153846\cdots$ で、やはり６桁。それぞれの桁の余りをよく見比べると、$2\div 13$ の余りは、$1\div 13$ の余りを２倍して１３で割った余りとなっているので、循環するときは一緒。

その意味をよくよく考えると、p が素数なら $1\div p$ の循環節の長さは必ず $p-1$ の約数になることがわかる。1 から $p-1$ まで、どれを割っても循環の長さは同じなので、どこの割算の余りに出てくるかで 1 から $p-1$ までが同じ個数を持つグループにわかれる。それぞれのグループに含まれる余りの個数が循環節の長さで、グループの個数をかけたものが $p-1$ になる。

例題３解答 $$0.15555\cdots=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}=\frac{7}{45}$$

$$0.23333\cdots=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=\frac{7}{30}$$

例題４解答 $0.76470588 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}} = \dfrac{13}{17}$

$0.13043478 = \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} = \dfrac{3}{23}$

例題５解答 $0.236067977 = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cdots}}}$ となる。$x = 0.236067977$ とすると、$\dfrac{1}{x} = 4+x$ より $x^2+4x-1=0$、これから $x = -2\pm\sqrt{5}$ であるが、$x>0$ より $0.236067977 = -2+\sqrt{5}$ となる。実際、$2+\sqrt{5} = 0.236067977499\cdots$ となる。

$0.3027756773 = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cdots}}}}$ となるので、$y = 0.3027756773$ とすると、$\dfrac{1}{y} = 3+y$、両辺に y をかけて $y^2+3y-1=0$、よって $y = \dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ で、$y > 0$ より $0.3027756773 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ である。実際、$\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} = 0.30277563773\cdots$ である。

$1.1925824 = 1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cdots}}}$ なので、$z = 1.1925824$ とおくと、$\dfrac{1}{z-1} = z+4$、両辺に $z-1$ をかけて $z^2+3z-5=0$ より、$z = \dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$、$z>0$ よ

り $1.1925824 = \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}$ である。実際、$\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2} = 1.192582403\cdots$ である。

例題６解答 $2.44948974 = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}$ となり、2 と 4 が交互に現れる。$x = 2.44948974$ とおくと、$x = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+x}} = \dfrac{5x+12}{5+2x}$ なので、両辺に $5+2x$ をかけて整理すると $x^2 = 6$、$x > 0$ より $x = \sqrt{6}$。実際、$\sqrt{6} = 2.44948974278\cdots$ となる。

$4.242640687 = 4 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cdots}}}}$ と、4 と 8 が交互にあらわれる。そこで、$y = 4.242640687$ とおくと、$y = 4 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+y}} = \dfrac{72+17y}{17+4y}$ となるので、整理して $y^2 = 18$、よって $y = 3\sqrt{2}$ となる。

例題７解答 $x^2 - 10y^2 = 1$ について：$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cdots}}$ と、6 が繰り返すので、順に試す。第 1 近似：$3/1$ だと、$3^2 - 10 \cdot 1 -^2 = -1$ でだめ。次に第 2 近似：$3 + 1/6 = 19/6$、ここで $19^2 - 10 \cdot 6^2 = 361 - 360 = 1$ よって、$x = 19, y = 6$ が最小の整数解。ちなみに、次の解は $x = 721, y = 228$。

$x^2 - 11y^2 = 1$ について; $\sqrt{11} = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cdots}}$ となり、以下 3 と 6 が繰り返す。順に試す。第 1 近似 $3/1$ では $3^2 - 11 \cdot 1^2 = -2$ でだめ。そもそも第 1 近

似、第 3 近似など奇数番目の近似は正解より小さい値なので、プラスマイナスがあわないので試す必要がない。以下の問題では、求める値のプラスマイナスに従って、偶数番目の近似、奇数番目の近似のみを調べることにする。この問題に戻って、第 2 近似は、$3+1/3=10/3$ で、$10^2-11\cdot 3^2=100-99=1$、よって $x=10, y=3$ が解。

$x^2-7y^2=1$ について: $\sqrt{7}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cdots}}}}$ となり、以下 $1,1,1,4$ という並びが繰り返す。順に試すと、第 2 近似 $3/1$ では $3^2-7\cdot 1^2=2$ でだめ。次に第 4 近似 $8/3$ では、$8^2-7\cdot 3^2=64-63=1$、よって $x=8, y=3$ が最小解。

$x^2-13y^2=-1$ について: $\sqrt{13}=3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}$ で、以下 $1,1,1,1,6$ という数字の並びが繰り返す。順に奇数番目を試すと、$3/1$ で $3^2-13\cdot 1^2=-4$、第 3 近似で $7/2$ で $7^2-13\cdot 2^2=49-52=-3$、第 5 近似で $18/5$ なので、$18^2-13\cdot 5^2=324-325=-1$ で、$x=18, y=-5$ が最小解である。

$x^2-13y-2=1$ について：第 2 近似で $4/1$、$4^2-13\cdot 1=3$、第 4 近似で $11/3$、$11^2-13\cdot 3^2=121-117=4$、第 6 近似では $119/33$ で、$119^2-13\cdot 33^2$ $14161-14157=4$、最後に第 8 近似では $649/180$ で、$649^2-13\cdot 180^2=4212-1^421200=1$。よって $x=649, y=180$ が最小解