5角形で数学を楽しむ
– トポロジー入門 –

小島 定吉 (東京工業大学大学院情報理工学研究科)

Email : sadayosi@is.titech.ac.jp

1　序

昨年末に，数学会が毎年開催している高校生向けの「湘南数学セミナー」の第 9 回を担当した．本稿は，数学通信に定着しつつある前例にならいその概要を記すものである．

私は第 5 回同セミナーから 3 回世話役を仰せつかり，セミナーの進展を裏方から眺める機会に恵まれた.「湘南数学セミナー」は主に高校生を対象にしたセミナーであり，しかもこの時期は愚娘が高校生だったこともあって，たいへん貴重な経験をさせていただいた．今回，平成 14 年度から同セミナーの世話をされている公報委員会から話があり，これも何かの縁と思い引き受けたのだが，一泊二日のセミナーを担当して,「湘南数学セミナー」はますます個性輝くセミナーに進化していると感じた．これまでに劣らず，私は若い人のエネルギーを頂戴し，若い人同士も互いに切磋琢磨したと思う．

とくにうれしかったのは，ほとんどの参加者が「考える」ことを楽しんでくれたことだ．昨今の学部 1 年生の講義の評判は概ね芳しくないという話をよく聞く．数学の楽しさに触れる第一歩である「考える」という作業が嫌われ気味である．数学以外の分野に進む学生に対して，このような身勝手な楽しさを押し付けるのは迷惑千万であるのは分かる．しかし数学に進む人には持って欲しい感覚であり，そうした感覚を持つ人が適当数は育つ環境を大切に維持したいと思う．

さて，数学通信の「湘南数学セミナー」関係の記事は，これまでは用意周到なセミナー配布資料に少々の加筆がなされたものばかりであった．今回は私の怠慢で準備が行き届かず，配布資料は項目を羅列するだけのメモになってしまった．最初は大幅に書き換えることも考えたが，聴衆が手にできた資料の現実を見ていただいた方が素直と思い，次章以降は，図を挿入し微小な表現の変更を加えた以外は，当日の配付資料そのままである．罪滅ぼしにはならないが，この章に，セミナーの話題を選んだ経緯と，プレゼンテーションについての新しい体験を記しておく．

多角形のモジュライの話の私的ルーツは，琉球大学の神山さんや　Kapovich-Millson の研究，および九州大学の西さんと奈良女子大学の山下さんとの共同研究にある．好みの

「風が吹けば桶屋がもうかる」式の噺の展開があり，落語家ではないが，専門外の聴衆を相手にした時のもちネタの一つになってきた．

最初は 2001 年 10 月の応用数理学会の総合講演（数学会との交換講演）だった．コンピュータに馴染みの深い聴衆を意識して，現東工大研究支援員の水嶋滋さんにお願いし，プレゼンテーション用の入力結果を直ちに反映するインタラクティブソフトウェア (図 1) を作成いただき，ペンタゴンと名づけ，全時間プロジェクタを使って行った．

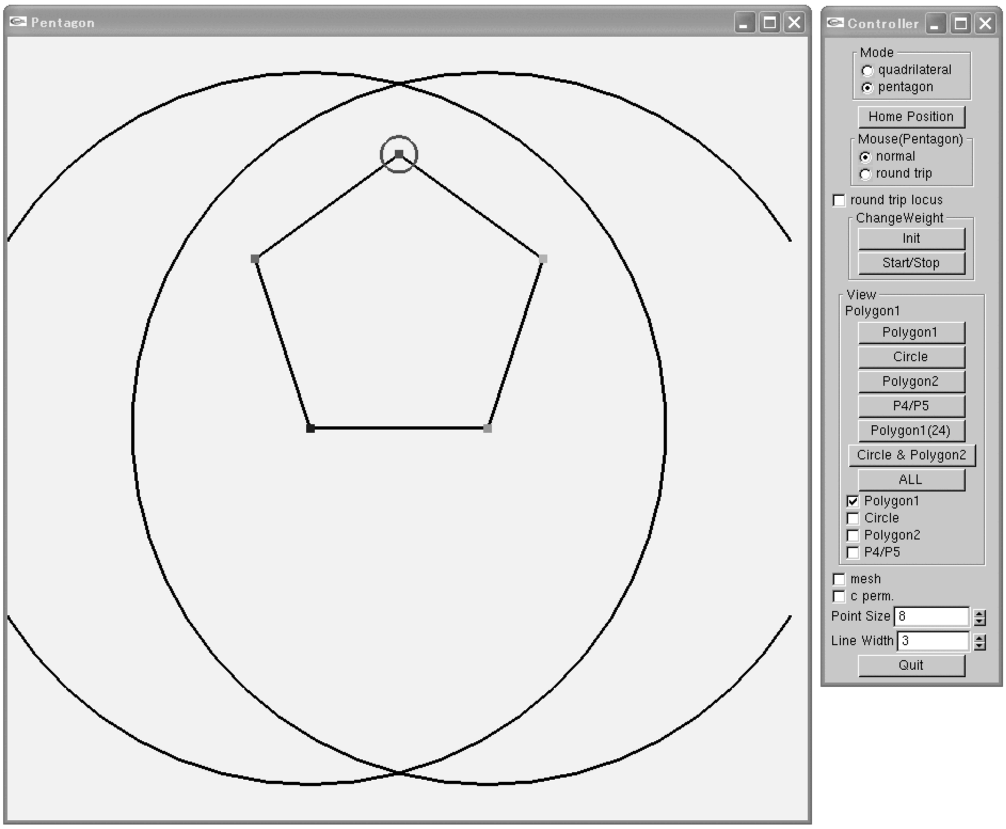

図 1: ペンタゴンのウインド

次に，2002 年 4 月に，慶応大学の理工学部新入生向けの「理工学概論」の一コマを仰せつかった．この科目は 200 人を超える大クラスであり，また高校生の知識しか期待できないことも念頭に，5 辺形のモジュライが種数 4 の曲面になることを，コンピュータ画面に沿う口上の説明だけでなく，実際に作って見せようと思った．もろにアナログの世界で，娘とかみさんと共闘の末，二晩かけて見るからに不思議議なモジュライが完成した．これは聴衆に受けた．手元でいつまでも限りなく裏返せる，なんとも手触り感が快適なモジュライの模型である．

図 2: 5 辺形のモジュライの模型

12 月には奈良女子大学情報科学科の談話会で話したのだが，聴衆の嗜好と噛み合わず失敗に終わった．その後，2003 年 2 月に埼玉大学数学教室の講演会に招かれた．奈良女での失敗を反省し，水嶋さんにペンタゴンの機能アップをお願いし，講演で口上と聴衆の想像に頼っていた部分を実際見ることができるようにした．24 種の変形を同時に可視化するウインドを用意したのだが，さすがコンピュータで，人間の思考を時間補完する助っ人となった．手元の種数 4 のモジュライと相まって，アナログとデジタルの対比が調和したエンディングに辿り着き，その晩埼玉大学の皆さまにはおいしいワインをご馳走いただき，感謝の至りである．

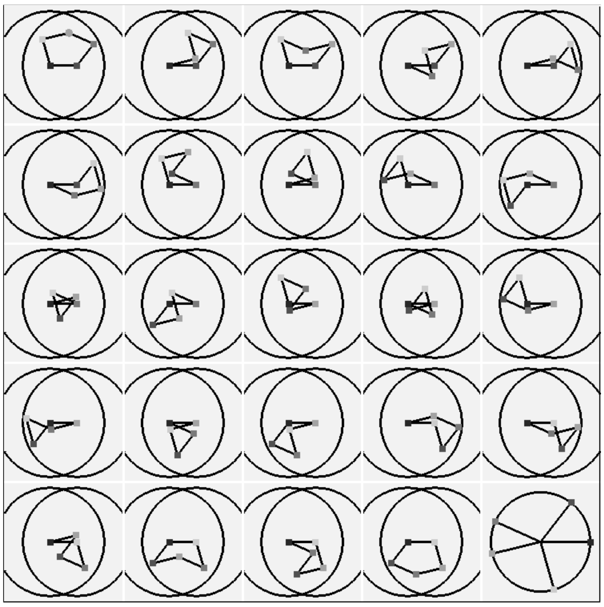

図 3: 24 個の等辺 5 辺形

こうして，もちネタは成功失敗を繰り返し徐々に成長してきたが，聴衆の理解の程度はそのバックグラウンドにあまり関係しないように感じられた．それゆえ，高校生を対象とする今回のセミナーにもこのネタを選んだ．実際，次章以降の “メモ” にあるトポロジーに関するたいへん素朴な準備と集合および写像の概念を補足したことにより，数学指向の高校生にとっては一日あれば無理のない話題になったはずである．

一つ，技術的なコメントを加えたい．今回のセミナーは参加者が 23 名と適当数であり，プレゼンテーションで，2003 年末に東工大の数理・計算科学専攻に集中講義で来られた愛媛大学の観音先生のアイデアを利用させていただいた．プロジェクタの画面を白板に映し出し，その場でのいろいろな疑問に対して回答をマーカーで白板に書き込むのである．この方法は，聴衆の理解にたいへん役に立った．準備し尽くされたコンピュータのプレゼンテーション画面は，講演者の一方的な意志は伝わるが，その場で生じる聴衆の疑問に答えるには意外に融通が効かない．そのため，多くの方がプロジェクタや OHP などの機器と板書を併用して工夫をしているが，双方を融合するのは私自身は初めてであり，実際たいへん有効であった．

さて，以下の章は，第 9 回湘南数学セミナーの配布資料に若干の修正を加え，当日使用したペンタゴンのウインドのハードコピーを数ヶ所挿入したものである．セミナーの内容の詳細について，“メモ” にはこの噺で私の頭に刻印されていることは書いておらず，読者には甚だ不親切な出来になってるが，噺の成長にしたがい記した雑拙記事・拙著を最終章参考文献の「今回の内容に関して」の項に挙げておいたので，そちらを参照いただきたい．

最後に，この場を借りて，今回の「湘南セミナー」をお世話下さった広報委員会のとくに前田吉昭，川崎徹郎両氏，湘南国際村協会，およびペンタゴンだけでなくチューターとしても支援して下さった水嶋滋氏に対し，深く感謝の意を記しておく．

2　曲面のトポロジー

- 多角形を貼り合わせてできる図形

  1. 正 3 角形を各頂点に 3 枚，4 枚，5 枚，6 枚? $\cdots$
  2. 正 4 角形を各頂点に 3 枚，4 枚? $\cdots$
  3. 正 5 角形を各頂点に 3 枚，4 枚? $\cdots$
  4. 正 6 角形を各頂点に 3 枚? $\cdots$
  5. 正 7 角形を各頂点に 3 枚? $\cdots$

- 正多面体
  1. オイラー標数：頂点の個数 − 辺の個数 + 面の個数
  2. バルーン構成
     ゴム膜変形でうつりあう ⇒ トポロジーが等しい
  3. トポロジーが等しい図形のオイラー標数は等しい
- 曲面 (2 次元多様体)
  1. 貼り合わせの条件
  2. 構成 (? の部分の正多角形の「正」をとって熟考)
  3. 貼り合わせを抽象的に考える
     空間の中で実現できなくてもよい
  4. オイラー標数の変化
- 曲面の分類
  1. 向き
  2. 種数とオイラー標数
  3. オイラー標数が等しい曲面はトポロジーが等しい

3 モジュライ

- 集合 (ものの集まり)
  1. 要素
  2. 要素が分かりやすい例：
     数の集合など
  3. 要素がやや分かりにくい例：
     (i) 数の集合を要素とする集合など
     (ii) 3 角形の集合 (全部集めるとは?)
     (iii) 3 角形の合同類の集合
     合同な 3 角形全部を集めた集合が要素
     互いに同一視して代表だけを集めた集合と比較

(iv) 3 角形の相似類の集合
相似な 3 角形全部を集めた集合が要素
互いに同一視して代表だけを集めた集合と比較
形の集合とよぶ

(v) 頂点を区別しないとそれぞれはどうなるか？

- 写像 (集合の間の対応)

1. 入力出力，一対一，像
2. 分かりやすい写像の例：
関数など
3. やや分かりにくい写像の例：
   (i) 各 3 角形に 3 辺の長さを対応させる写像 (一対一？)
   (ii) 各 3 角形に 3 辺の長さの比を対応させる写像 (一対一？)
   (iii) 各 4 角形に 4 辺の長さを対応させる写像 (一対一？)
   (iv) これらの写像の像は？
   (v) 頂点を区別しないとそれぞれはそうなるか？

- モジュライ (モジュラスの集まり ＝ ものの集まり)
いろいろな性格をもった集合を要素とする集合
数学的に明快に記述される集合に写像でうつし，座標付け (番地付け，コード化) する

1. 3 角形の合同類のモジュライ
2. 3 角形の相似類のモジュライ
3. 平行 4 辺形の相似類のモジュライ
4. 等辺 4 辺形のモジュライ (図 4, 5, 6)

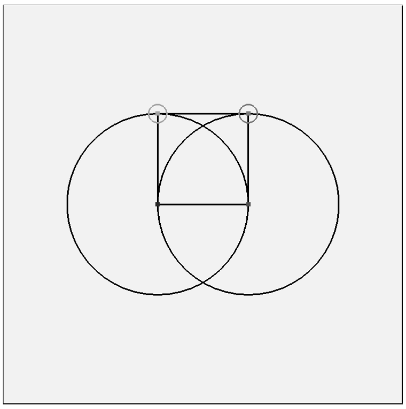

図 4: 等辺 4 辺形 — 正方形

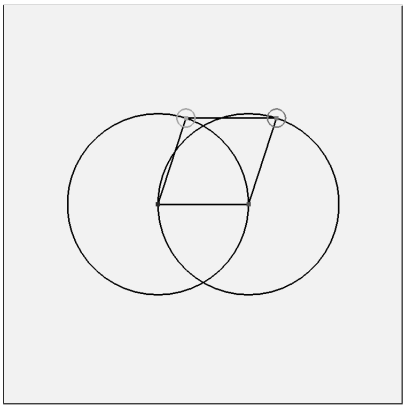

図 5: 等辺 4 辺形 — 菱形

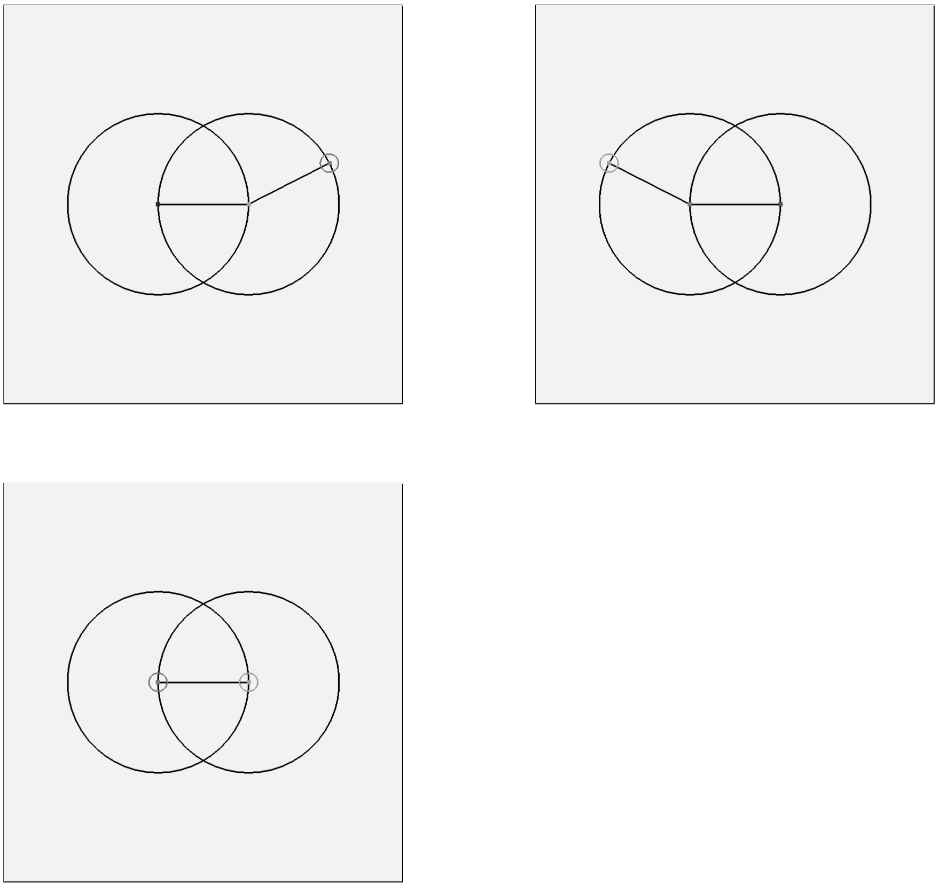

図 6: 等辺 4 辺形 — 退化の例 3 種

4　等辺５辺形のモジュライ

- 辺の長さが一定の凸５角形のモジュライ
    1. 一つの頂点の位置が形を決める (図７)

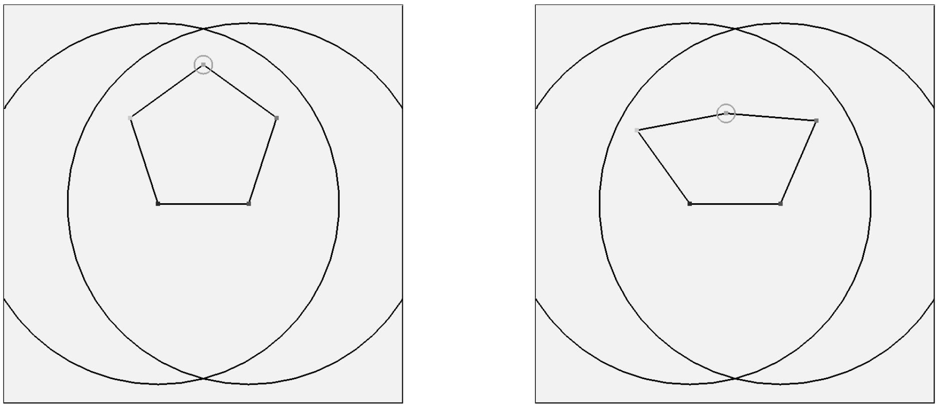

図 7: 等辺５辺形 – 正５角形とやや変形した状態

    2. 平面上の５つの円弧で囲まれた領域と同一視
    3. 可視化 (図８)

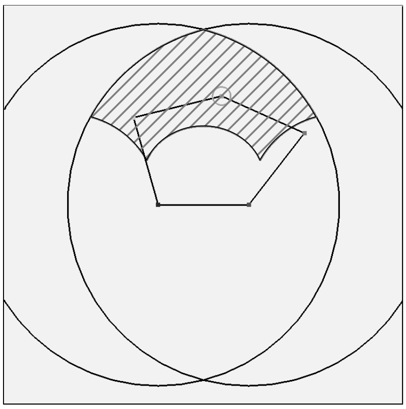

図 8: 凸５角形のモジュライ

- 辺の長さが一定の，領域を囲むとは限らない５辺形のモジュライ

1. いろいろな状況を観察 (図 9, 10)

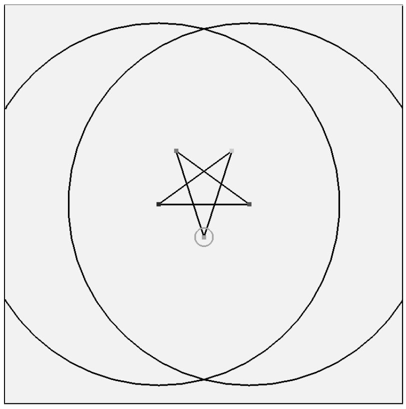

図 9: 等辺 5 辺形 — 星

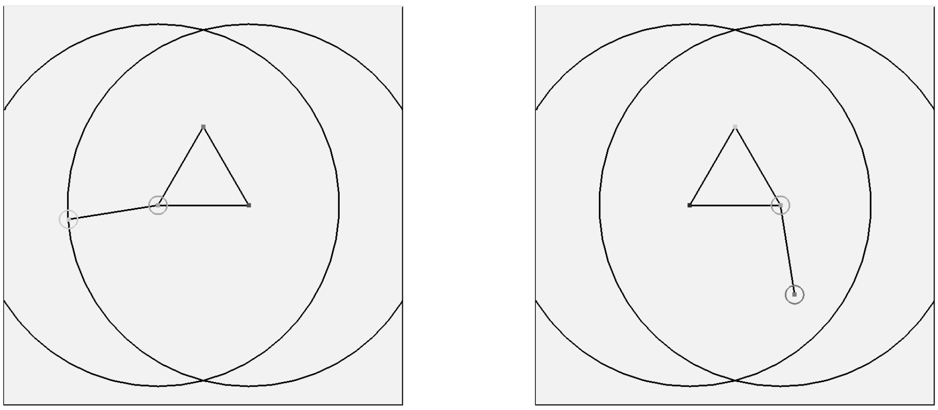

図 10: 等辺 5 辺形 — 退化の例

2. どのような集合に対応させるのがうまいか ?

5　モジュライを分割して貼り合わす

- 組合せ的不変量を使いモジュライを分割
    1. 頂点に番号をつけ，ガウス写像をもちいて各 5 辺形を円周上の 5 点配置に対応させる (図 11)

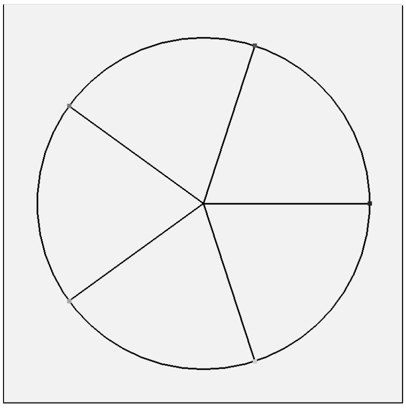

図 11: 円配置

    2. 頂点の番号の円順列を目安にモジュライを 24 分割 (図 12)

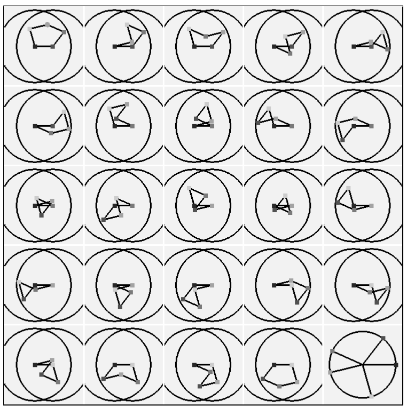

図 12: 共通の円配置をもつ 24 個の等辺 5 辺形

    3. 分割された各ピースを凸 5 角形のモジュライと同一視 (魔法の等式)

- 分割された各ピースを貼り合わせる

1. 貼り合わせルール
2. オイラー標数を計算
3. モジュライのトポロジー（Havel 神山の定理）
4. ほんとうに貼り合わせてみると？ (図 2 参照)

6 発展

- 発展の余地 = 不満足な点
  1. モジュライの各ピースが 5 角形もどきである点
  2. 辺の長さが一定という仮定
- 不満足解消法
  1. Schwarz-Christofell 写像により円周上の 5 点配置を等角 5 角形に変換 (図 13)

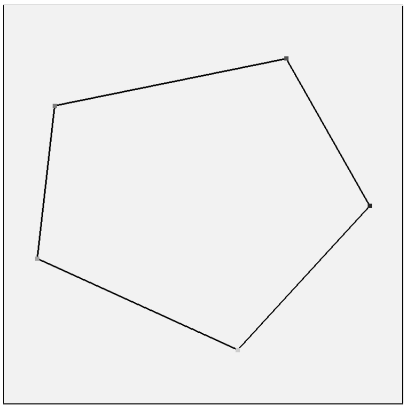

図 13: 等角 5 角形

  2. 双曲幾何入門
  3. 等角 5 角形のモジュライは双曲化により双曲直角 5 角形
  4. 24 枚の双曲直角 5 角形の幾何学的貼り合わせ
  5. 可視化 (図 14, 15)

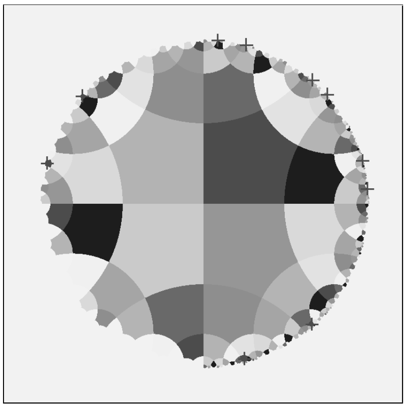

図 14: 双曲直角 5 角形で分割された 5 辺形のモジュライの普遍被覆

等辺 5 辺形は住処であるモジュライのどこに居るか？

(i) 一つの等辺 5 辺形 (左上)

(ii) 対応するラベルつき円配置 (右上)

(iii) 対応するラベルつき等角 5 角形 (左下)

(iv) モジュライの普遍被覆上に無数の点 (右下)

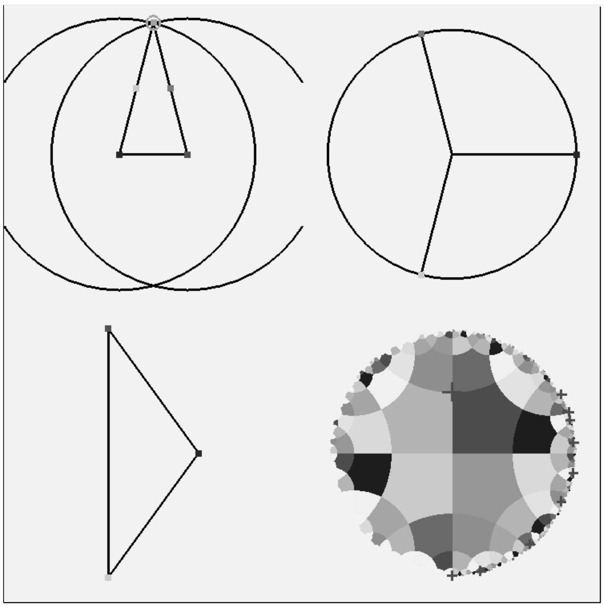

図 15: 等辺 5 辺形のモジュライへの対応

6. 辺長の変化は 5 角形の角度に対応させる
7. 変化の可視化 (図 16)

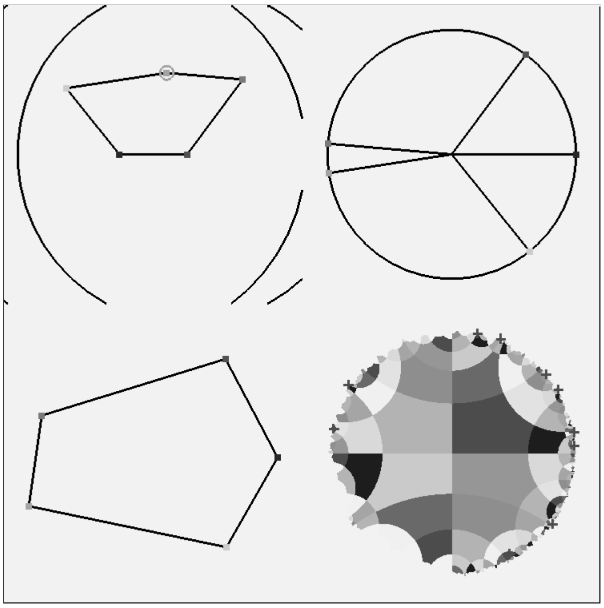

図 16: 等辺とは限らない 5 辺形のモジュライ

辺長を変化させるとモジュライの双曲構造が変化し，普遍被覆を構成する双曲直角 5 角形の形が変わる

7 参考文献

- トポロジーの入門書・啓蒙書

1. 野口宏：トポロジーの話題から，日本評論社，1973 年.
2. 森田茂之+志賀浩二：トポロジーの展開，日本評論社， 1992 年.
3. 河野俊丈：組みひもの数理，遊星社，1993 年.

- トポロジーの標準的教科書

1. 田村一郎：トポロジー，岩波全書，1972 年.
2. 加藤十吉：トポロジー，サイエンス社，1978 年.

- 今回の内容に関して

1. 拙記事：3 次元の幾何，日本評論社「数学のたのしみ」，no 9 (1998), 21–31.
2. 拙著：多角形の現代幾何学 増補板，牧野書店，1999 年.
3. 拙記事：多角形のモジュライと双曲構造，日本評論社「数学のたのしみ」，no 28 (2001), 18–28.
4. 拙著：3 次元の幾何学，朝倉書店，2002 年.
5. ペンタゴン：http://www.is.titech.ac.jp/~sadayosi/lab/sadalab.j.html からダウンロード可能.