

数学と工学との出会い

＝離散系を中心に＝

浦川 肇(東北大・情報)

1 はじめに—工学とは

「工学とは？」工学部で毎年、新入生向けに出されているパンフレットを参考に、門外漢が想像すると、

- 現象を理解し、利用して新しい価値を創造する。
- ‘働きをもったシステム’の創造。

ということのようである。工学サイドから数学をみると、ここに、次のようにして「数学の助け・働き」が必要となる：

- (1) 現象の「数学モデル」を立てる。
- (2) 「解」を求める。厳密解が得られないときは、「数値シミュレーション」を実行する。
- (3) 「最適解」を探す。

このように工学と関わりをもつ数学は、「工業数学（数理）」「応用数学（数理）」などと呼ばれている。さて、このような数学と、高校での数学と大学共通科目（1，2年）の数学との関係を見ると、概略、次のようになる。

高校の数学	大学共通科目の数学	工業数学・応用数学
代数	線形代数学	OR、線形計画法、離散数学
微分・積分	微分積分学 ベクトル解析 変分法、微分幾何 微分方程式	コンピュータ・グラフィックス、 CAD ロボット制御 薄膜の振動、 ニューラル・ネットワーク、 ファジィ理論
複素数	複素関数論	
級数	フーリエ級数・ラプラス変換	数値解析、有限要素法
確率・統計	数理統計学	マルコフ連鎖

ではこれから次の順に話を進めましょう。

- オペレーションズ・リサーチ(OR)
- 線形計画法 (Linear Programming)
- グラフ理論とマルコフ連鎖
- CAGD、コンピュータ・グラフィックスの数理

2 オペレーションズ・リサーチ(OR)

工学と数学との鮮やかな関係は、OR と呼ばれる学問分野で最も端的にあらわれるようである。

イギリスでは、1935年頃1939年に第2次世界大戦が始まり物理学者のP.M.S. ブラケット (Blackett) が中心になり研究作戦活動が行われ成功をおさめた。この成功はアメリ

カにも伝えられ、1942年以来次々に OR チームが出来たという。戦後は産業界の生産や輸送の問題に開発研究が行われ、大いに発展してきた。事の起こりは、1935年頃のイギリスに始まる。当時は第二次世界大戦前夜であり、ヒトラーのイギリス本土空襲に備えてレーダーが開発されて、軍事演習をやってみたが、効果がない。物理学者であったブラケット(P.M.S.Blackett)らは、「問題は、設備の改善ではなく、むしろ運用の仕方・考え方にある」と捉え返して分析・解析を進め成功を収めた。やがて「operational research」という語が与えられたという。1942年には、イギリスでの成功の知らせがアメリカにも伝えられ、モース(P.M.Morse)やキンボール(G.E.Kimball)らを中心に次々に OR チームが出来、発展した。第二次大戦後は、軍事から民間へと研究の主体が移り、生産管理、生産性向上、意志決定、運用計画、最適化法、など企業の経営などに欠くことのできない分野に発展している。

OR の手法は、問題が複雑でどこから手を着けてよいか分からないとき、また、実行に際してはデメリットも予想して対策を立てたいとき、衆知を集めて行いたいとき、極めて有効である。それはおおよそ、次のようなものである。

(1) OR は、社会、経済の様々な現象、問題から数学モデルを導き、普遍的な原理・法則を導くものである。

(2) それは会社などの組織の最高責任者の意志決定に合理的な判断の基礎を与えるものである。

(3) OR の研究の対象は、問題解決のための方法、考え方である。

(4) OR の実施は、共同で行うもので、分析し、定式化し、最適化を行う。

実際、どのようなものであるか、OR の方法を説明しよう。最も有名なものとして、よく使われるのが「ブレン・ストーミング(brain storming)」である。これは人数があまり多くなく、数名の参会者のときに行うと良い。着席順に問題についての意見を聞いて行く。その際、重要なことは次の二点である：(a) 理由の説明はしない、(b) 賛否の意見・批判は一切しないこと。司会者は、黒板や紙に、どんなに細かい意見でも、単語・文章を書き留めて行く。意見が出尽くしたら、そこでストップして、字句の整理、優劣・可能性を検討して行く。というものである。

「デルファイ法(Delphi method)」というのもある。これは古代ギリシャの「デルフィの神託」にちなむもので、参会者の人数がある程度多いときでもよく、はじめに質問表を配布し、項目毎に回答者から意見を聞く。意見分布を整理し、再度、回答者に配布し、項目毎に意見を聞き直す。何回か繰り返すと意見は収束してゆく。というものである。

「KJ法(川喜田二郎法)」は良く知られている。これは下記の参考書でも解説されている。これは共通の主題で集まった会議でおこなう。まず、主題をはっきりさせるため、参加者の意見を出来るだけ吐き出させ、ブレン・ストーミングをおこなう。記録係は、発言のエッセンスを、片一端から紙切れに記録してゆく。「一行見出し」をつけて、発言内容ごとに書いてゆく(二時間で数十枚から百枚くらい。コンセプト・フォーメーションともいう)。記録された紙片群を大テーブルか畳などに拡げる。それらの紙切れを読み、似た紙切れ同士を一個所に集め、グループ編成し、各グループに見出しを付ける。一枚だけのグループも可。小チーム同士を編成したら、それらからいくつかの中チームをつくり、各中チームごとに見出しを付ける。同様にして大チームをつくる。このようにグループ分けが済んだら、これらが大チームから逆の順に大きな用紙に図解してゆく。図解化された紙に基づいて紙切れの資料を使って文章化してゆく、・・・というものである。

一般企業、学校、研究所などでは、これらの方法は日常的に良く行われているようである。トップに立つ人が意欲的に、問題点を見つけそれらの解決に向けて、全員が協力して行い、そのような OR の専門家を気長に育てて行くことが成功の秘訣のようである。

OR の発展は数学の研究を大いに促した。現在では、数理計画法、シミュレーション、スケジューリング、グラフ理論、ネットワーク理論、待ち行列理論、ゲーム理論、予測理論、確率過程論、などの研究へと発展している。この小論では、その例示として、次に線形計画法を紹介しよう([4], [5])。

3 線形計画法(Linear Programming)

これは次のような問題を扱う。

[例題] (1) ある工場が3種類の原料 A_1, A_2, A_3 を、それぞれ 1200、560、580 kg だけ保有している。これらの原料を使って、製品 B_1, B_2 を作りたい。(2) 製品 B_1 を1単位作るためには、原料 A_1, A_2, A_3 がそれぞれ、3、1、2 kg 必要であり、製品 B_2 を1単位作るためには、原料 A_1, A_2, A_3 がそれぞれ、4、2、1 kg 必要である。(3) また、製品 B_1, B_2 を1単位作ると、利益はそれぞれ3万円と2万円である。(4) 利益を最大にするには、製品 B_1, B_2 をそれぞれ何単位作ればよいか。

[考え方] 製品 B_1, B_2 をそれぞれ x_1, x_2 単位作って、 z 万円の利益が上がるとすれば、次の等式が成り立つ。

$$z = 3x_1 + 2x_2.$$

この z を目的関数という。一方、手持ちの原料には限りがあるので、 x_1, x_2 は次の不等式を満足する：

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 1200 \\ x_1 + 2x_2 \leq 560 \\ 2x_1 + x_2 \leq 580 \end{cases}$$

これを制約条件という。さらに問題の意味を考えると、次の不等式を仮定する必要がある(非負条件という)。

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

上記の問題は、制約条件と非負条件の下に、目的関数の値を最大にするような x_1 と x_2 (最適解) を求める問題となる。

このような種類の問題は、線形計画法の問題と呼ばれている。この問題の解法には、

- (1) 図形による初等的解法
- (2) G. B. ダンツィク(Dantzig, 1947年) による単体法
- (3) N. カーマーカー(Karmarkar, 1984年)による内点法

などが知られている。単体法は、線形代数学における連立方程式の解法に「掃き出し法」というのがあり、ピボット (pivot、軸) 変形を行うことによってなされるが、これと同様に行うことでなされる。例えば [7] を見よ。

(1) 図形による解法 上記の (x_1, x_2) 平面で制約条件と非負条件をみたす (x_1, x_2) 全体の集合を可能領域という。この場合の可能領域は、図のような凸五角形 OABCD の内部とその境界となる。頂点の座標はそれぞれ、 $O(0, 0)$, $A(290, 0)$, $B(224, 132)$, $C(80, 240)$, $D(0, 280)$ である。

目的関数 $z = 3x_1 + 2x_2$ の値を k とすると、

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{k}{2}$$

なので、これは1つの直線を表し、 k の値を変化させると互いに平行な直線族ができる。可能領域と交わるこれらの直線族の中で k を最大にすれば良い。これを実現するのは、直線が点 $B(224, 132)$ を通るときで、

$$z = 3 \times 224 + 2 \times 132 = 936$$

これから、 B_1 を 224 単位、 B_2 を 132 単位作れば最大利益 936 万円を得る。

(2) 単体法 これは連立1次方程式の解法の1つである「掃き出し法」を使い、次のステップを踏んで計算を実行するものである。以下、[7] に従って紹介しよう。これは内田伏一先生が工夫されたものであり、簡明な形になっていることに注意して欲しい。

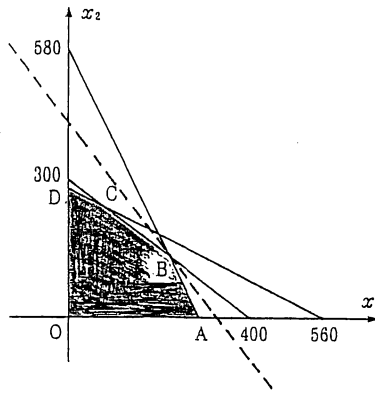


図 1: 図形による解法

(第 1 段) 不等式による制約条件を見やすくする。

このため、新しい変数 x_3, x_4, x_5 を追加して、書き直す (スラック変数と呼ばれる)。このとき問題は、次のように書き換えられる。等式の制約条件

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 & = 1200, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & = 560, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 & = 580 \end{cases}$$

と、非負条件

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

に書き換える。このような制約条件と非負条件の下に、目的関数

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

の最大値とそれを与える x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求めよ、という問題を考察することになる。

(第 2 段) さて、目的関数 z も変数のように扱い、次のように並べる。

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 & = 1200, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 & = 560, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 & = 580, \\ -3x_1 - 2x_2 & + z = 0. \end{cases}$$

係数の表を次のように書き出す。

(スタート表)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
3	4	1	0	0	0	1200
1	2	0	1	0	0	560
2	1	0	0	1	0	580
-3	-2	0	0	0	1	0

さて、この表をスタートとし、掃き出し法で変形して、次の表が得られたとしよう。

(ゴール表)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
1	0	*	0	*	0	d_1
0	0	*	1	*	0	d_2
0	1	*	0	*	0	d_3
0	0	c_3	0	c_5	1	m

ゴール表の最下段を見ると、目的関数は

$$z = m - 0x_1 - 0x_2 - c_3x_3 - 0x_4 - c_5x_5$$

と表示されている。ここでもしも

$$d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_3 \geq 0, c_3 \geq 0, c_5 \geq 0 \quad (\#)$$

であったとすると、非負条件 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ の下に、

$$z \leq m$$

最適解は $(d_1, d_2, 0, d_4, 0)$ となる。

(第3段) スタート表からどうやってゴール表を見つければ良いか。ピボット変形を行う。

(スタート表)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
3	4	1	0	0	0	1200
1	2	0	1	0	0	560
2°	1	0	0	1	0	580
-3	-2	0	0	0	1	0

3行1列成分2に °印を付けてある。3行を2で割り、その何倍かを多の行に加えて、第1列の °印以外の成分を0にする変形を、°印の成分を軸(ピボット)とするピボット変形という。

以下、次々にピボット変形を行う。

計算表数	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	
I	3	4	1	0	0	0	1200
	1	2	0	1	0	0	560
	2°	1	0	0	1	0	580
	-3	-2	0	0	0	1	0
II	0	5/2°	1	0	-3/2	0	330
	0	3/2	0	1	1/2	0	270
	1	1/2	0	0	1/2	0	290
	0	-1/2	0	0	3/2	1	870
III	0	1	2/5	0	-3/5	0	132
	0	0	-3/5	1	2/5	0	72
	1	0	-1/5	0	4/5	0	224
	0	0	1/5	0	6/5	1	936

この表から、目的関数の最大値は 936 で、最適解は $x_1 = 224, x_2 = 132, x_3 = 0, x_4 = 72, x_5 = 0$ である。

(第 4 段) ピボットの選び方。表 I から表 II、表 II から表 III へ移る作業については、次の操作を踏むものとする。

<ステップ 1> 表の最下段の係数の中に、負の係数がなければ、作業は終了する。負の係数があれば、そのような係数の中で絶対値が最大になるものを選ぶ。係数の絶対値の最大の値が 2 つ以上あれば、その中のどれでもよい。それが第 s 列の c_s であるとする。

<ステップ 2> 第 s 列中 $a_{is} > 0$ となる a_{is} をすべて求める。

<ステップ 3> ステップ 2 で求めた a_{is} と、第 i 行の右端の係数 d_i との比 d_i/a_{is} を計算し、この比が最小になる a_{is} を求める。それを a_{rs} とする。これと比が同じ値のものが 2 つ以上ある時は、その中のどれでもよい。

<ステップ 4> a_{rs} をピボットとしてピボット変形するとよい。

以上の手順により、単体法の計算を実行することが出来る。なお、この操作を繰り返しても、循環現象が起きて最適解に到達しないことがある。これを避ける工夫がなされているが、ここでは省略する。

4 グラフ理論とマルコフ連鎖

グラフ理論は離散数学の中心の理論の 1 つであるが、それはオイラーに始まる。グラフとは頂点の集合 V と辺の集合 E よりなるが、次のようにして、線形代数学の中の「各成分が非負整数からなる対称行列の理論」の応用編とみなせる。(以下[8]、[9]を見よ。) 実際、 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ で、次の性質を満たすものを考える。

$$\begin{cases} (1) & a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, \dots, n), \\ (2) & a_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, n), \\ (3) & a_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (i, j = 1, \dots, n). \end{cases}$$

このような行列 A に対して、 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ を頂点の集合とし、頂点 i と頂点 j とを a_{ij} 個の辺で結ぶことによって 1 つのグラフ (V, E) を作る事が出来る。逆にグラフが与えられるとき、上のような行列を対応させる事が出来る。この行列 A はグラフの隣接行列 (adjacency matrix) と呼ばれる。行列 A は対称行列なので、固有値 λ_i ($i = 1, \dots, n$) は必ず実数である。

例

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1 (ペロン=フロベニウスの定理) A の固有値を $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ とする。このとき次が成り立つ。

- (1) $|\lambda_i| \leq \lambda_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$
- (2) 固有値 λ_n の重複度は 1 である。
- (3) $\lambda_n \leq \deg(A)$

ここで $m_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ は頂点 i の次数と呼ばれ、頂点 i から出る辺の数を表す。 $\deg(A) = \max\{m_i; i = 1, \dots, n\}$ である。

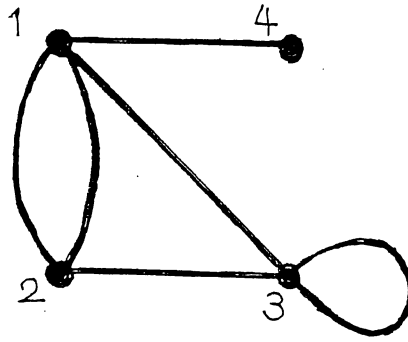


図 2: グラフの例

集合 $\{\lambda_i; i = 1, \dots, n\}$ はグラフ (V, E) のスペクトルと呼ばれる。

定理 2 (1) $k = 1, 2, \dots$ に対して、 $A^k = \overbrace{A \cdots A}^k$ とする。このとき A^k の第 (i, j) 成分は頂点 i と頂点 j とを結ぶ長さが k の歩道の総数と一致する。

(2) (始点の違いを考慮に入れて数え上げた) 長さ k の閉じた歩道の総数をそのグラフの k 次モーメントと呼び、 $M_k(V, E)$ とかく。このとき

$$M_k(V, E) = \text{Tr}(A^k) = (\lambda_1)^k + \cdots + (\lambda_n)^k$$

が成り立つ。

(3) 特に、二つのグラフ (V_1, E_1) と (V_2, E_2) のスペクトルが同一であれば、それらのすべてのモーメントは一致する： $M_k(V_1, E_1) = M_k(V_2, E_2)$ ($k = 1, 2, \dots$)。

(証明) (1) のみ示す。 k についての帰納法による。 $k = 1$ のときは、行列 A の定義より正しい。 $k - 1$ のとき主張は正しいと仮定し、 k のとき、正しいことを示す。 $B = (b_{ij}) = A^{k-1}$ とおく。このとき

$$(A^k)_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} b_{\ell j}$$

において、右辺の $a_{i\ell}$ は頂点 i と辺で結ばれている頂点を表し、帰納法の仮定より、 $b_{\ell j}$ は頂点 j とつながる長さ $k - 1$ の歩道の個数を表し、それらの総数が右辺である。即ち、(1) が成立する。

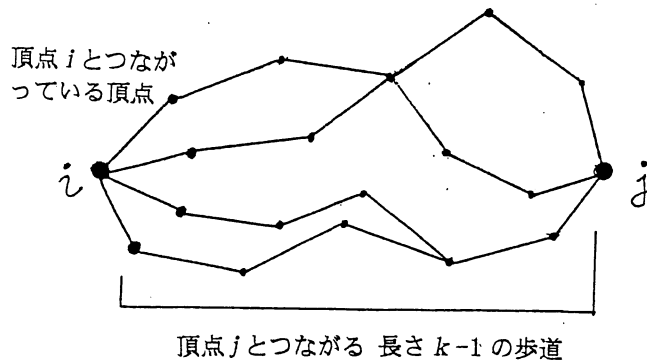


図 3: 定理 2 の証明

この定理から、スペクトルが等しいが、互いに異なるようなグラフがあるか否か問題になったが、これについては次の例が存在する：

定理 3 (M.E. Fischer, G.A. Baker, 1966 年) 次の二つのグラフは同じスペクトルを持つ。

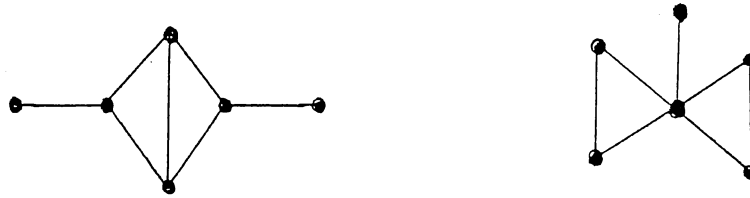


図 4: 同じスペクトルを持つ二つのグラフ

(マルコフ連鎖) グラフ理論の確率論への応用として、マルコフ連鎖があり、確率解析で重要な役割を演じている。それに関する面白い話題を紹介しよう。

グラフ (V, E) において、頂点 i に立つ酔歩が頂点 j に 1 ステップで移る確率を p_{ij} で表す。 n 次行列 $P = (p_{ij})$ を推移行列または確率行列という。行列 P は次の性質をもつ。

$$\begin{cases} (1) & p_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, n), \\ (2) & \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \end{cases}$$

P_{ij} は、頂点 i の上に立つ酔歩 (乱歩、ランダム・ウォーク) が 1 ステップで頂点 j に移る確

率を表す。 $k = 1, 2, \dots$ に対して、 $P^k = \overbrace{P \cdots P}^k$ とする。このとき P^k の定義より、

$$(P^k)_{ij} = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^n P_{ii_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{k-1} j}$$

が成り立ちこれは頂点 i から k ステップで頂点 j に移る確率 $P^k(i, j)$ と一致する。 P をマルコフ連鎖という。任意の二つの頂点 i と j について、適当なステップ k ステップ目で、頂点 i から頂点 j に移ることが出来るとき、 P は既約という。

定理 4 P を既約なマルコフ連鎖とすると、 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 上に、次が成り立つ唯一つの確率分布 π が存在する (この π は均衡分布と呼ばれる) :

- (1) $0 \leq \pi(j) \leq 1 \quad (j = 1, \dots, n),$
- (2) $\sum_{j=1}^n \pi(j) = 1,$
- (3) 任意の i と j について、 $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k(i, j) = \pi(j).$

有限群 G 上の確率測度 p つまり、 p が G 上の正值関数で、 $\sum_{x \in G} p(x) = 1$ を一つ取る。このとき $P(x, y) = p(x^{-1}y)$ により、 G の元 x から y に移る推移確率が与えられ、これによりマルコフ連鎖が与えられる。このとき、 $P^k(x, y) = p^{(k)}(x^{-1}y)$ となる。ここで $p^{(k)}$ は k 回の合成積 $p * \cdots * p$ のことで、 $f * g(x) = \sum_{z \in G} f(z)g(z^{-1}x)$ である。

さて、1906年のこと、マルコフ (A. Markov) は

「トランプの 52 枚のカードをシャッフルしたとき、何回シャッフルすれば良く混ざり合っていると思って配付してよいだろうか」

ということを問題にした。この解答のためには「52 次の対称群 $G = S_{52}$ について、どのくらい大きく k を取れば、 P^k は均衡分布 π に十分近いか」という問題を解かねばならない。この場合の V は $G = S_{52}$ そのものなので、その要素の個数は $(52)!$ という巨大な数である。

D. Bayer と P. Diaconis らは 1986 年に、次のような V 上の 2 つの確率分布 μ と ν との距離 (全分散距離) という概念を導入した。

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \sup_{A \subset V} |\mu(A) - \nu(A)|$$

そして、 P^k と均衡分布 π との全分散距離を精密に計算し、 $k = 8$ とき、均衡分布と P^k との間の全分散距離は約 0.167 であるという結果を得て、「シャッフルは、少なくとも $k = 8$ 回は必要でありかつそれで十分である」という「実用的な」面白い結果を示した (下図と [6] を見よ)。

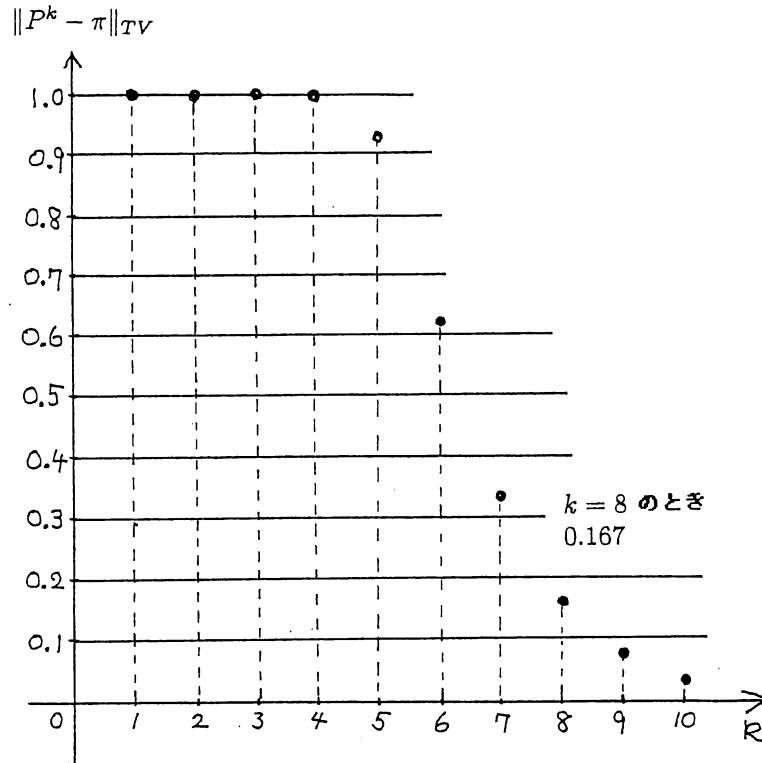


図 5: 全分散距離

5 CAGD、コンピュータ・グラフィックスの数理

この節では CAGD (Computer Aided Geometric Design) に関わる数学を述べよう。今日、CAD (Computer Aided Design) として知られる理論と技法には、微積分学と微分幾何学が大いに関わっている。それらを [2]、[3] から かいま見よう。1950 年代のこと、自動車のボンネットの生産には、木や鉄でできたプレス型が用いられていた。しかし欠陥は明らかで、計算機でなんとかしようということになった。当時、微分幾何学で良く知られていたパラメトリック曲線・曲面の利用の試みが行われ、これが CAD の起源である。問題は次のようになる。

(問題) いかにして、簡単なシステムで、曲線や曲面を描画できるか？

1966 年、ルノー社のベジエ (P. Bézier) と 1959 年、シトロエン社のド=カステリヨ (P. de Casteljau) はそれぞれ独自に開発に成功した。ド=カステリヨの研究の方が早かったが、公表が遅れたためベジエ曲線・曲面の名前が付けられた。これは解析学に昔からあった次

のスプライン曲線 (spline、雲形自在定規) を求める補間法の問題を考察することに由来するようである。

(問題) 平面上に与えられた $n + 1$ 個の点 x_0, x_1, \dots, x_n を通る滑らかな曲線を求めよ。

さて、1974年に、アメリカのユタ大学でこのようなコンピュータを使って描画する数学、コンピュータ科学、工学のコンファレンスが開催され、その報告書が出版され、Computer Aided Geometric Design という新しい学問分野が開花することになった([1])。

さて、ここで、「簡単に放物線を描画する」ド=カステリョのアイデア (アルゴリズム) を解説しよう。

(1) 平面上に三点 b_0, b_1, b_2 をとる。

(2) 実数 $0 < t < 1$ を任意に取り、二点 b_0 と b_1 を結ぶ線分 b_0b_1 を $t:1-t$ に内分し、その内分点を $b_0^1(t)$ とせよ、すなわち、 $b_0^1(t) = (1-t)b_0 + tb_1$ とする。

(3) 同様に、二点 b_1 と b_2 を結ぶ線分 b_1b_2 を $t:1-t$ に内分し、その内分点を $b_1^1(t)$ とする、つまり、 $b_1^1(t) = (1-t)b_1 + tb_2$ とする。

(4) 次に、(2) と (3) でできた二点を結んでできる線分 $b_0^1(t)b_1^1(t)$ をさらに、 $t:1-t$ に内分せよ。その内分点を $b_0^2(t)$ とする。

(5) $0 < t < 1$ をいろいろ変えて出来る曲線 $b_0^2(t)$ は、 $t = 0$ のとき b_0 を通り、 $t = 1$ のとき b_2 を通る放物線である。

実際、

$$\begin{aligned} b_0^2(t) &= (1-t)b_0^1(t) + tb_1^1(t) \\ &= (1-t)\{(1-t)b_0 + tb_1\} + t\{(1-t)b_1 + tb_2\} \\ &= (1-t)^2b_0 + 2t(1-t)b_1 + t^2b_2 \end{aligned}$$

となる。これは t の2次式であり、実は t を $-\infty$ から $+\infty$ まで動かすことができ、放物線を描くことが確かめられる。

以上のことは次のように、一般化される (ベジェ曲線作成のアルゴリズム) :

(1) 始めに、 $n + 1$ 個の点 b_0, b_1, \dots, b_n を与える (任意でよい)。

(2) $b_i^0(t) = b_i, (i = 0, 1, \dots, n; 0 \leq t \leq 1)$ とおく。

(3) $r = 1, 2, \dots, n$ と $i = 0, 1, \dots, n - r$ に対して、

$$b_i^r = (1-t)b_i^{r-1} + tb_{i+1}^{r-1}(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

とおく。

(4) 最後に出来る $b_0^n(t) (0 \leq t \leq 1)$ をベジェ曲線という。

ベジェ曲線は b_0 と b_n を通る n 次曲線など好ましい良い性質を持っており、コンピュータで描画できる。始めに与える $n + 1$ 個の点 b_0, b_1, \dots, b_n をベジェ制御点という。ベジェ曲線は、ベルンシュタイン多項式を使って記述でき、詳しい解析が可能となる。ここでベルンシュタイン多項式とは、2項係数を使って定義される n 次多項式

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$$

のことである。ここで

$$\binom{n}{j} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & (i = 0, 1, \dots, n) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

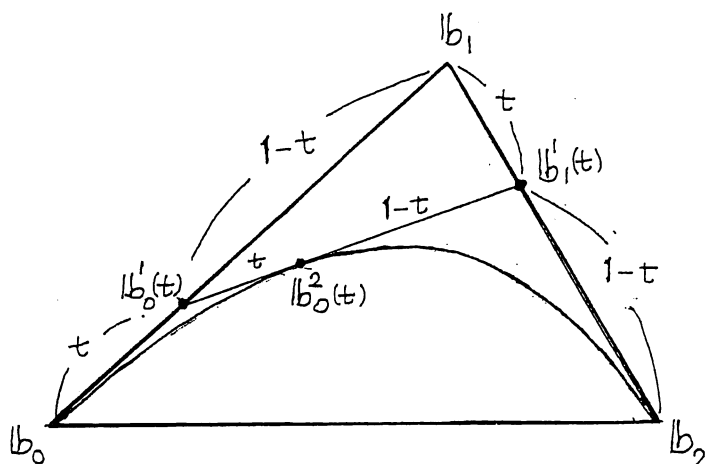


図 6: ド=カステリヨのアルゴリズム

とおく。このとき

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1} + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1 \quad (2)$$

である。実際、(1) は次のようにして示される。

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \end{aligned}$$

となるからである。ここで等式 $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$ を使った。

定理 5 各 $r = 0, 1, \dots, n$ に対して、上記の $b_i^r(t)$ は次のように表示できる。

$$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^r B_j^r(t) b_{i+j} \quad (i = 0, 1, \dots, n-r)$$

特に、ベジェ曲線 $x(t) = b_0^n(t)$ は次のように表示される：

$$x(t) = b_0^n(t) = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) b_j$$

これをベジェ曲線のベルンシュタイン表現という。

(証明) $r = 0, 1, \dots, n$ に関する帰納法により示される。始めに $r = 0$ のときは明らかに正しい。 $r - 1$ のとき正しいと仮定して、 r のとき正しいことを示す。実際、次のようにして示される。

$$\begin{aligned}
 b_i^r(t) &= (1-t)b_i^{r-1}(t) + tb_{i+1}^{r-1}(t) \\
 &= (1-t) \sum_{j=0}^{r-1} B_j^{r-1}(t)b_{i+j} + t \sum_{j=0}^{r-1} B_j^{r-1}(t)b_{i+1+j} \quad (\text{帰納法の仮定より}) \\
 &= (1-t) \sum_{k=i}^{i+r-1} B_{k-i}^{r-1}(t)b_k + t \sum_{k=i+1}^{i+r} B_{k-i-1}^{r-1}(t)b_k \\
 &= (1-t) \sum_{k=i}^{i+r} B_{k-i}^{r-1}(t)b_k + t \sum_{k=i}^{i+r} B_{k-i-1}^{r-1}(t)b_k \quad (0 \text{ である項を使って和を調整}) \\
 &= \sum_{k=i}^{i+r} \{(1-t)B_{k-i}^{r-1}(t) + tB_{k-i-1}^{r-1}(t)\} b_k \quad (\text{まとめて整理した}) \\
 &= \sum_{k=i}^{i+r} B_{k-i}^r(t)b_k \quad (\text{等式 (1) を使った}) \\
 &= \sum_{j=0}^r B_j^r(t)b_{i+j}
 \end{aligned}$$

が成り立つからである。 □

今度は3次元空間 \mathbb{R}^3 上に $(m+1)(n+1)$ 個の点 b_{ij} ($0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$) の点を与えたとき、これらの点を通る曲面を考えよう。これには次のようなパラメータ (u, v) を持つ \mathbb{R}^3 内の曲面 x を考える (ベジエ・パッチと呼ばれている) :

$$x(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) b_{ij} \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1).$$

1つの大域的な滑らかな曲線や曲面を作るには、ベジエ曲線やベジエ・パッチをつなぎ合わせ

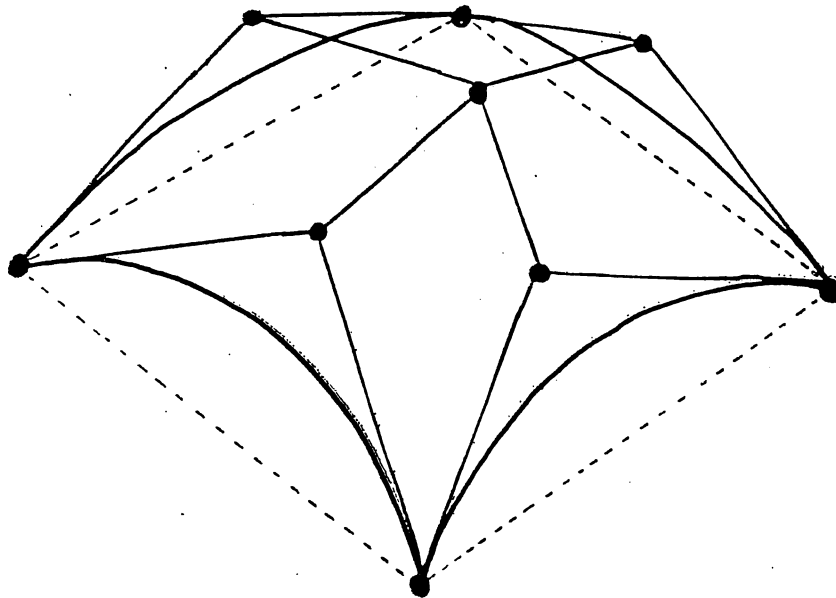


図 7: ベジエ・パッチ

る技法が必要となる。それらの細部については [2]、[3] を見て下さい。

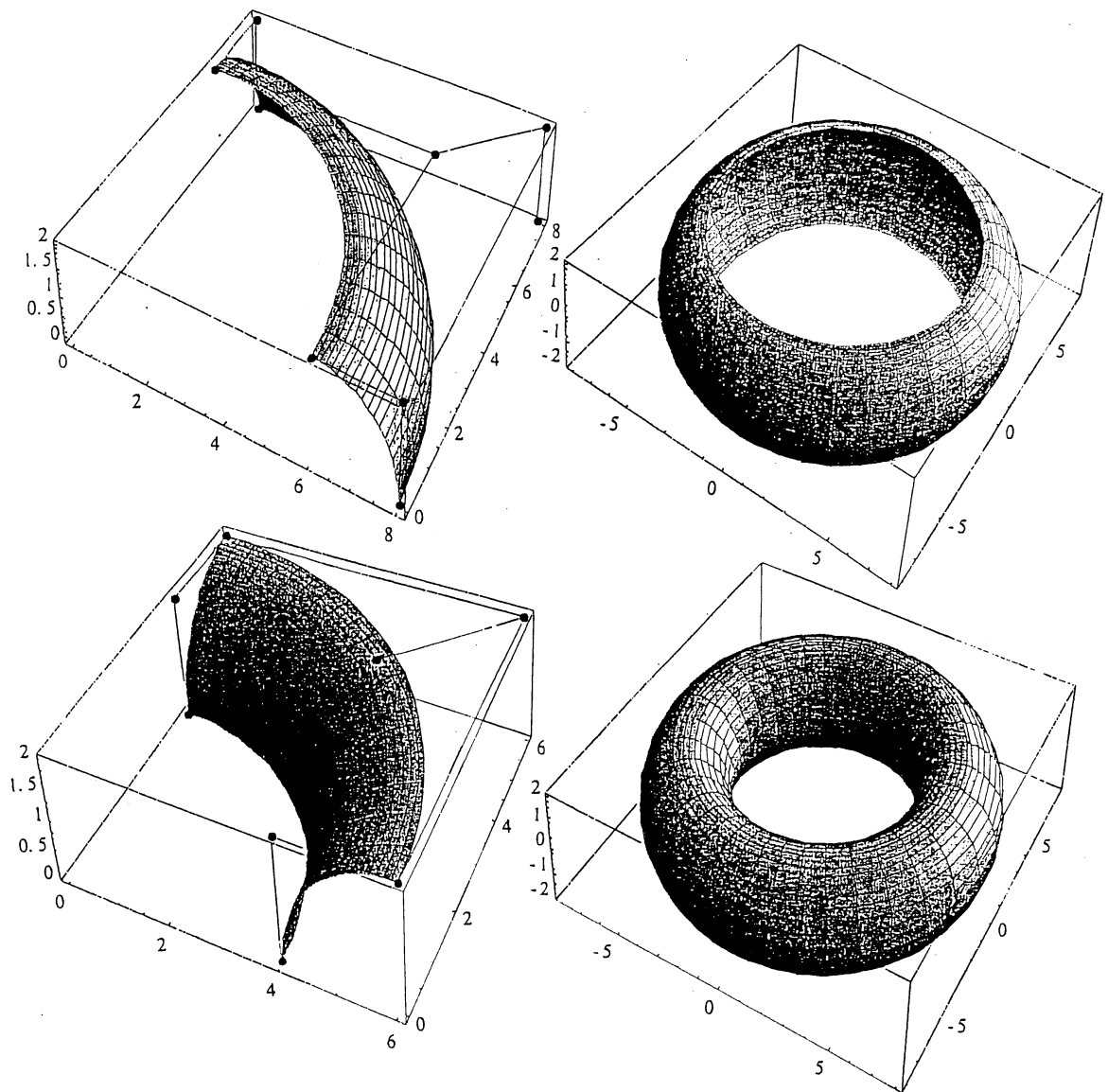


図 8: トーラス

(ベルンシュタイン表現の利点) (1) ド=カステリヨのアルゴリズムは直観的で分かりよいが、計算ステップが多く、計算時間がかかりすぎる。

(2) ベルンシュタイン多項式は数学ではなじみ深いので、ベルンシュタイン表現により、ベジェ曲線の接線などの(高次の)微分が簡単に計算できる。この結果、ベジェ曲線の理論の研究が進展し、CAD (Computer Aided Design) の工業技術が大いに発展し、それらの成果がコンピュータ・グラフィックスに応用されるようになった。

(3) 現在では、NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) と呼ばれる「最も一般的に曲線・曲面を描く技法」へと発展を続けている。

以上は、平成16年(2004年)卒業の三吉裕子氏の修士論文より、特に図6を引用致しました。同氏に感謝致します。

上記では、離散的な数学と工学との関わりを中心とする話題に絞ってきた。ロボット制御、ファジィ理論、ニューラルネットワーク理論、薄膜の振動、有限要素法など、連続的な数学と工学との関わりに関する話題については、この続編を見ていただきたい。ここでは紙数も尽きたので、この辺でひとまず筆をおくことにします。

参考文献

- [1] R. Barnhill and R.F. Riesenfeld, editors, Computer Aided Geometric Design, Academic Press, 1974.
- [2] G. E. Farin, CAGD のための曲線・曲面理論, 共立出版, 1990.
- [3] ———, NURBS 射影幾何学から実務まで, 共立出版, 1999.
- [4] 川喜田二郎, 発想法, 中公新書, 1967年.
- [5] 近藤次郎, オペレーションズ・リサーチ, 丸善.
- [6] L. Saloff-Coste, Random Walks on Finite Groups, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer, (2004), 263-346.
- [7] 内田伏一=浦川肇, 線形代数概説, 裳華房, 2000.
- [8] 浦川肇, ラプラス作用素とネットワーク, 裳華房, 1996.
- [9] ———, スペクトル幾何学とグラフ理論, 応用数理, 12 (2002), 29-45.

(うらかわ はじめ, 東北大学大学院情報科学研究科)